3.3.389

3 N. 3.

INSTITUZIONI MECCANICHE

TRATTATO

DEL P. ABATE D. GUIDO GRANDI

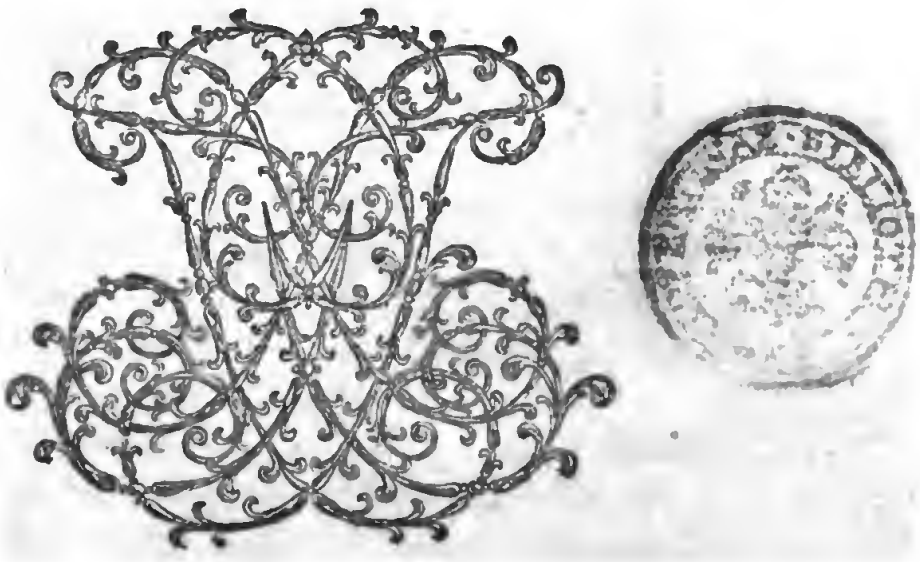
EX-GENERALE CAMALDOLESE, E PROFESSORE
DI MATTEMATICA NELL' UNIVERSITA' DI PISA

DEDICATO

All' Illuſtriſs. e Clariſs. Sig. Senatore

PIER FRANCESCO DE' RICCI

PRESIDENTE DELL' ILLUSTRISS. SACRA, E MILITARE RELIGIONE
DE' CAVALIERI DI S. STEFANO, AUDITORE, E MODERATORE
VIGILANTISSIMO DELLO STUDIO PISANO.



IN FIRENZE NELLA STAMPERIA DI S. A. R.

Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi.
CON LIC. DE' SUP. MDCCXXXIX.

Illuſtriſs.mo, e Clariſs.mo Sig.re e Padron Colendiſs.mo

LE INSTITUZIONI MECCANICHE *le quali ad alcuni ſtudenti furono da me dettate in volgare, ed a più altri in latino, eſſendoſi ora in queſta noſtra lingua Italiana ſtampate, mi dò l' onore di dedicarle a V. Sig. Illuſtriſs. e Clariſſima; Perchè, eſſendo ella ſupremo Auditore, e Moderatore diligentiſſimo della noſtra Piſana Univerſità, averà guſto di eſaminare queſte mie private lezioni, per comprendere, ſe con la dovuta ſquiſitezza, e diligenza, ſianſi dichiarate nello ſtudio le più utili parti della Scienza Matematica, impoſtami d' inſegnare a codeſti ſcolari. Non dubito, che V. Sig. Illuſtriſsima, e Clariſſima ſia per approvare queſt' Opera, benchè tanto in breve contenga li moltiſſimi Teoremi, e Problemi, at-*

tenenti a queſta Meccanica; e ſpero ancora, che l' animo ſuo generoſiſſimo potrà compiacerſi pure dell' altre Scienze Meccaniche, cioè Inſtituzioni Geometriche, Aritmetiche, Algebratiche, Ottiche, Catottriche, Diottriche, Aſtronomiche, &c. che altresì farò dare alla luce, tanto in lingua Toſcana, che in lingua Latina, perchè poſſano eſſere inteſe ancora nell' altre Provincie d' Europa: purchè la mia età, già in molti anni avanzata, e da alcune familiari indiſpoſizioni del capo oppreſſa, non mi trattenga dal poter diſporre tutte queſte mie ſpeculazioni, in maniera di poterle così dare alle ſtampe, come ſo, che la ſua grazioſiſſima Gentilezza ne bramerà il compimento.

Mi raſſegno però, con tutto l' oſſequio, alla ſua impareggiabile benignità, e rimettendomi a' ſuoi pregiatiſſimi comandi, ſinceramente mi dò l' onore di confermarmi.

Di V. Sig. Illuſtriſsima, e Clariſſima

Devotiſsimo Obbligatiſsimo Servitore
D. Guido Abate Grandi.

PREFAZIONE.

Queſte Meccaniche Instituzioni, che comprendono la Scienza Teorica, e la Pratica del Moto de' Corpi peſanti, e delle forze, che ſi applicano a tali movimenti, benchè in breve Trattato raccolte, ne eſpongono però la maggior parte de' Teoremi, e Problemi neceſſarii per tale Scienza. Solamente ſi ſono quì tralaſciate alcune notizie, che appartengono all' Arte Militare, perchè non le ho ſtimate convenienti al mio Religioſo Inſtituto, e poſſono vederſi ne' libri de' Secolari, Pietro Sardi Romano, Buonajuto Lorini Fiorentino, Pietro Paolo Floriani Maceratenſe, Donato Roſſetti Livorneſe, Giuſeppe Gallizio Veneziano, ed altri ſimili, l' Opere de' quali ſono però molto lunghe, ed in alcuni libri di eſſi vi è la pura Pratica, non la dimoſtrazione Geometrica.

Queſto mio Trattato è diviſo in dieci Capitoli, de' quali il primo parla, *del Moto Equabile*; il ſecondo, *de' Momenti* di qualſivoglia forza; il terzo, *del Centro di Gravità;* il quarto, *del Moto compoſto di più Moti Equabili*; il quinto, *delle Macchine, che facilitano il Moto*; il ſeſto, *del Moto accellerato, e ritardato*; del che pure ne ho ſtampato nelle note del Galileo, circa il moto naturalmente accellerato, come può vederſi nell' ultima edizione dell' Opere Galileane, nel tomo 3. dalla pag. 382. alla pag. 419. Il ſettimo è, *del Moto compoſto di moto equabile, e dell' accellerato*, che accade ne' varj tiri di palle, di cui ancora ho parlato nelle ſuddette mie note del Galileo, dalla pag. 419. alla pag. 425. L' ottavo capitolo è, *della Percoſſa*, il nono, *de' Pendoli*, e l' ultimo, cioè il decimo è, *della reſiſtenza de' Solidi*. Di ciò avea già molto parlato nella mia *Riſpoſta Apologetica*, gli di cui Teoremi ſono molto approvati dal Sig. Pietro Van Muſſchenbroek, dottiſſimo Profeſſore dell' Accademia di Utrech, nel ſuo libro *di Fiſica Eſperimentale, e Geometrica*, ſtampato in Leida del 1729. ed ancora ne ho diſcorſo di molto nel Trattato *delle Reſiſtenze*, principiato dal Viviani, e da me compiuto, riordinato, ed accreſciuto con moltiſſime dimoſtrazioni, il quale è pure impreſſo nel detto tomo 3. della nuova edizione del Galileo, dalla pag. 193. alla 305.

Si

Si poteva ancora, tra queſte Meccaniche dimoſtrazioni, aggiungervi ciò, che ſi è da me dimoſtrato ne' due libri, *del Movimento dell' acque*, ſtampati nel tomo 2. della *Raccolta degli Autori, che trattano del Moto dell' acque*, dalla pag. 435. alla pag. 593. gli quali può eſſere ancora ſi tornino a riſtampare nel Corſo mio matematico, in cui ſi vedranno ancora eſpoſti gli Elementi Geometrici, ed Aritmetici, e Conici, ed Algebratici, ed Ottici, ed Aſtronomici &c. tutti in breve dimoſtrati, gli quali non ſolo ſaranno propoſti in ſimili tometti piccoli, con queſta noſtra Toſcana lingua: ma di più ſe ne farà l' impreſſione di tutti queſti Trattati in lingua Latina, raccolti in quarto, perchè ancora da gli Oltramontani poſſano eſſere inteſi.

Ancora nel ſopra accennato tomo 3. del Galileo, dalla pag. 331. alla altra 339. vi ſono ſtampate alcune mie dimoſtrazioni circa *il Moto de' Corpi Solidi, in un mezzo fluido*; Il che pure può appartenere a queſt' Opera Meccanica: ma baſta ſi oſſervi dove già è impreſſo nel detto libro. Però ſarà bene, che da molti ſi conſideri queſto Trattato, in cui ſono le principali dimoſtrazioni, di molti effetti aſſai giovevoli a molte pratiche, di cui ne hanno diſcorſo ancora gli antichi Filoſofi, e Matematici, avendone ancora Ariſtotele fatta un Opera di Meccanicha, però con alcune falſità

ſità aggiuntevi, onde Girolamo Cardano, e Franceſco Patrizio, non ſtimano, che poſſa eſſere quell' Opera ſcritta da lui; e meglio parlano di queſte propoſizioni gli Matematici, che i puri Filoſofi. Però non ſi ritrova chi ſpieghi nella Meccanica tutti gli argomenti, di cui io parlo in queſti dieci Capitoli: mentre la maggior parte degli altri Autori, o parlano ſolamente dell' uno, o di due, o di tre ſoli oggetti, ivi propoſti; Però, benchè vi manchino alcune poche coſe, ſuppongo, che ſiano per ſoddisfarſi meglio molti Studenti, di queſta materia, nel preſente Trattato da me propoſto.

IN-

INSTITUZIONI MECCANICHE

DEFINIZIONI.

I. ER MECCANICA s' intende la ſcienza del moto, e delle forze moventi.

II. VELOCITA' ſi chiama quella proprietà relativa del moto, che naſce dal paragone dello ſpazio ſcorſo dal mobile, e del tempo impiegato nel moto; ſicchè diceſi tanto più veloce un moto dell' altro, quanto maggiore è lo ſpazio fatto in egual tempo, ovvero quanto minore è il tempo ſpeſo in fare ſpazj eguali.

III. MOTO EQUABILE diceſi quello, in cui ſi mantiene ſempre la ſteſſa velocità: ſicchè in qualunque egual parte di tempo, ſi paſſi una parte eguale di ſpazio.

IV. MOTO ACCELERATO ſi chiama quello, in cui va ſempre creſcendo la velocità; onde in pari tempo ſi ſcorra più ſpazio verſo il fine, che verſo il principio del moto.

V. MOTO RITARDATO è quello, in cui la velocità va ſempre diminuendoſi; onde in pari tempo ſi fa minor parte di ſpazio verſo il fine del moto, di quello ſi faceſſe verſo il principio.

VI. POTENZA ſi appella tutta quella forza aſſoluta, che indipendentemente da qualunque circoſtanza vantaggioſa, o ſvantaggioſa, riſiede in ciò, che muove, o che reſiſte al moto per avere il ſuo effetto.

VII. MOMENTO chiamaſi quella forza relativa,

che acquiſtaſi da una potenza in ordine al muovere, o reſiſtere al moto, ſecondo le varie circoſtanze, e diſpoſizioni, colle quali viene applicata, e ſpezialmente per cagione della minore, o maggiore velocità, con cui è in procinto a muoverſi, in paragone del moto, che dee avere una potenza a ſe contraria.

VIII. DIREZIONE d' una potenza, o di un mobile, è quella linea retta, per cui queſto è tirato da quella, o ſpinto a muoverſi: che ſe il mobile, o la potenza deſcriverà qualche linea curva, allora la direzione ſi cangierà in qualunque punto, e ſarà ſempre la tangente di quel punto della curva deſcritta. Imperocchè per la detta tangente ſcapperebbe il mobile, ſe non foſſe da qualche forza trattenuto, ed obbligato a ſeguitare la medeſima curva, come ſi vede in un ſaſſo girato colla fionda, di cui, laſciando ſcorrere un capo, ſubito ſcorre il ſaſſo per la tangente di quell' arco, che deſcriveva, come ſe foſſe indirizzato per eſſa, ſebbene poi il ſuo peſo lo fa deſcrivere un' altra curva, come vedraſſi a ſuo luogo.

IX. LA GRAVITA' è quella potenza, o forza aſſoluta, con cui i corpi terreſtri ſono tirati, o ſpinti al baſſo verſo il centro della terra.

X. CENTRO DEL MOTO è quel punto, d' intorno a cui ſi muove un corpo, o qualche ſtrumento, ovvero l' aggregato di più corpi inſieme conneſſi.

XI. CENTRO DI GRAVITA' in un corpo, o in più corpi inſieme collegati ſi dice quel punto, d' intorno a cui ſi equilibrano tutte le parti in modo tale, che ſe quel punto ſolo foſſe ſoſtenuto, il tutto ſtarebbe fermo, purchè altra ſpinta non ſi deſſe a veruna parte.

XII.

XII. FORZA CENTRIFUGA è quella, che riſpinge un mobile dal centro, intorno a cui gira, come appariſce in un ſaſſo girato colla fionda, da cui ſi tiene teſa eſſa fionda, ancora quando deſcrive l' arco ſuperiore del cerchio, ed in conſeguenza dove non opera la ſua gravità, ma la ſola forza, con cui tende ad allontanarſi dal centro del moto.

SUPPOSIZIONI.

I. CHe il centro di gravità d' uno, o di più corpi connèſſi, ſe non venga impedito, cerchi d' accoſtarſi quanto mai ſia poſſibile al centro della terra,

II. Che i gravi poſti in quiete da ſe non ſi muovano, quando il loro centro comune di gravità non poſſa diſcendere.

III. Che la velocità una volta impreſſa nel mobile, in eſſo rimanga intiera per fino a tanto, che da qualche azione contraria non ſi diſtrugga; onde ogni corpo dovrà perſeverare nel ſuo ſtato di quiete, o di moto per la medeſima direzione, e colla ſteſſa velocità, con cui ha principiato a muoverſi, ſe non in quanto da qualche altra forza venga obligato a mutare ſtato, ed alterarlo in qualſivoglia maniera.

IV. Che una potenza applicandoſi ad operare in qualunque punto della ſua direzione, faccia il medeſimo effetto, dimodochè con più lungo, o più breve filo tiri a ſe un corpo, e mantenga ſempre la medeſima direzione.

V. Che le direzioni, colle quali naturalmente diſcendono i corpi gravi, non molto fra di loro diſtanti, poſſano conſiderarſi come parallele, tra

loro ſulla ſuperficie della terra, ſenza verun ſenſibile errore nelle coſe Fiſiche, e Meccaniche; imperciocchè differiſcono dall' eſſer eſattamente parallele, ſolo per la quantità dell' angolo piccoliſſimo, che comprenderebbero eſſe direzioni prolungate fino al centro della terra, eſſendo il detto angolo a quattro retti, come la diſtanza delle ſuddette direzioni a tutto il contorno del globo terreſtre, che però non è coſa ſenſibile.

ASSIOMI.

I. La ſteſſa potenza operando con maggior velocità, ha maggior momento, e con minore velocità, avrebbe momento minore, e con velocità eguale, eſerciterebbe egual momento.

II. Se colla ſteſſa velocità ſi applica una maggior potenza, avrà maggior momento, ed una potenza minore, avrà minor momento, ed una egual potenza avrà momento eguale.

III. Colla ſteſſa velocità movendoſi un mobile, fa maggiore ſpazio in più lungo tempo, minore ſpazio, in tempo più breve, eguale ſpazio, in tempo eguale.

IV. Eſſendo ſpinto un mobile in due parti direttamente oppoſte da due momenti eguali, non cederà a veruno di eſſi, ma rimarrà del tutto immobile.

V. E viceverſa ſe un corpo rimane immobile fra più potenze, che in diverſe parti lo ſpingono, biſogna, che i momenti di eſſe potenze, ſecondo qualunque direzione oppoſta ſieno eguali, altrimenti cederebbe il corpo al momento maggiore, laſciandoſi colà traſportare, ove foſſe ſpinto da eſſo.

CAP.

CAPITOLO I.

Del Moto Equabile.

PROPOSIZIONE I.

Se colla ſteſſa velocità viene traſcorſo lo ſpazio S *nel tempo* T, *e lo ſpazio* L *nel tempo* H, *equabilmente, ſaranno detti ſpazj proporzionali a' tempi.* Tav. I. Fig. 1.

IMperocchè, ſiccome nel tempo *T*, ſi fa lo ſpazio *S*, così, ſtante la medeſima velocità, ſi farebbe in altrettanto tempo, altrettanto ſpazio (per l' Aſs. 3.) onde preſo qualſivoglia moltiplice del dato tempo, per eſempio 3 *T*, ſi farebbe in eſſo uno ſpazio egualmente moltiplice 3 *S*, e per la ſteſſa ragione in qualſivoglia moltiplice dell' altro tempo H, per eſempio 4 *H*, ſi paſſerebbe uno ſpazio 4 *L* altrettanto moltiplice dello ſpazio *L*, e perchè in vigore del medeſimo Aſſioma 3. ſecondo che il tempo 3 *T* foſſe maggiore, minore, o eguale al tempo 4 *H*, riuſcirebbe altresì lo ſpazio 3 *S*, reſpettivamente maggiore, minore, o eguale allo ſpazio 4 *L*; dunque i tempi *T*, *H* ſono proporzionali agli ſpazj *S*, *L*, mentre ſi accordano gli egualmente moltiplici degli antecedenti, nell' eſſer maggiori, minori, o eguali, agli egualmente moltiplici de' conſeguenti, ſecondo qualunque moltiplicazione, come richiede la definizione de' Proporzionali. Il che doveaſi dimoſtrare.

PROPOSIZIONE II.

Se nello ſteſſo tempo colla velocità V *ſi farà da un mobile lo ſpazio* S, *e colla velocità* C *ſi ſcorreſſe* Fig. 2.

lo ſpazio L, *ſaranno detti ſpazj proporzionali alla velocità.*

CIò ſegue immediatamente dalla diſinizione ſeconda, ſenza che faccia uopo dimoſtrarla più particolarmente, oppure ſi può applicarvi la dimoſtrazione della precedente, con prendere i moltiplici delle velocità in vece de' moltiplici de' tempi, ed argumentando come ſopra.

COROLLARIO.

Se gli ſpazj ſono proporzionali alle velocità, ſaranno paſſati in tempi eguali, perchè ſe uno ſpazio ſi foſſe ſcorſo in tempo maggiore dell' altro, una parte del primo ſpazio ſarebbe ſcorſa in tempo eguale a quello, di tutto lo ſpazio ſecondo, onde quella parte del primo, ſarebbe a tutto il ſecondo, come le loro velocità, il che ſarebbe contro l' Ipoteſi, in cui ſi ſuppongono gli due ſpazj interi proporzionali ad eſſe velocità.

PROPOSIZIONE III.

Fig. 3. *Se colla velocità* V, *nel tempo* T, *ſi faccia lo ſpazio* S, *e colla velocità* C, *nel tempo* H, *lo ſpazio* L, *ſaranno gli ſpazj* S, L *in ragione compoſta di quella delle velocità. e di quella de' tempi.*

SUppongaſi un terzo mobile, che nel tempo *T*, colla velocità *C*, faccia lo ſpazio *D*, ſaranno gli ſpazj *S*, *D*, come le velocità *V*, *C*, eſſendo fatti nello ſteſſo tempo *T*, poſcia lo ſpazio *D*, allo ſpazio *L*, ſarà come il tempo *T*, al tempo *H*, eſſendo fatti colla medeſima velocità *C*; dunque la ragione di *S*

ad

ad *L*, la quale ſi compone di quella di *S* a *D*, e di queſta di *D* ad *L*, riuſcirà compoſta dalla ragione delle velocità, *V*, *C*, e de' tempi *T*, *H*. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se dalle linee eſprimenti le velocità, ed i tempi, ſi faranno due rettangoli *VT*, *CH*, ſaranno queſti come gli ſpazj *S*, *L*; imperocchè tali rettangoli (prop. 23. lib. 6. degli Elem.) hanno pure la ragione compoſta de' lati *V*, *C*, e degli altri *T*, *H*, che ſono intorno i loro angoli eguali. Fig. 4.

II. Se ſarà il tempo *T*, al tempo *H*, come reciprocamente la velocità *C* alla velocità *V*, gli ſpazj *S*, *L* ſaranno eguali, perchè ancora i rettangoli *VT*, *CH*, che d'intorno gli angoli eguali avrebbero i lati reciprochi, ſarebbero eguali (prop. 14. lib. 6. degli Elem.), e viceverſa qualunque volta detti ſpazj *S*, *L* foſſero eguali, ſarebbero reciproche le velocità a i tempi, dovendo allora riuſcire eguali i detti rettangoli, e però avere i lati reciprochi ſecondo la medeſima propoſizione.

III. E' manifeſto poi, che ſe gli ſpazj ſono come le velocità, ſaranno fatti in tempo eguale, e ſe ſaranno come i tempi, ſaranno ſcorſi con eguale velocità, perchè i ſuddetti rettangoli *VT*, *CH*, ſe ſono in ragione di *V* a *C*, biſogna che abbiano egual' altezze *T*, *H*, oppure, ſe ſono come *T* ad *H*, biſogna che rieſcano eguali *V*, *C*. Fig. 5. Fig. 6.

IV. Similmente i tempi ſaranno in ragione compoſta degli ſpazj, e delle velocità reciprocamente preſe. E le velocità avran ragione compoſta di quella degli ſpazj, e della reciproca de' tempj; imperciocchè, facendo ancora il rettangolo di quel- Fig. 7.

le linee *T*, e *C*, che esprimono il tempo di un moto, e la velocità dell' altro, sarà *TC* ad *HC* in ragione de' tempi *T*, *H*, ed è la ragione di *TC* ad *HC* composta di quella di *TC* ad *TV*, e di *TV* ad *HC*, delle quali la prima è reciproca delle velocità, essendo come *C* ad *V*, e la seconda è la medesima degli spazj; dunque i tempi *T*, *H* sono in ragione composta degli spazj *S L*, e della reciproca delle velocità *C*, ed *V* Similmente *VT* a *CT*, si compone dalle ragioni *VT* a *CH*, e *CH* a *CT*, delle quali la prima è quella degli spazj *S*, *L*, e la seconda è reciproca de' tempi, cioè come *H* a *T*, e però la ragione de' tempi è composta di quella degli spazj, e della reciproca delle velocità, e quella delle velocità è composta di quella degli spazj, e della reciproca de' tempi.

CAPITOLO II.

De' Momenti.

PROPOSIZIONE IV.

Fig. 8. *Se una stessa potenza, ovvero potenze eguali, si applicano a muovere un corpo, o a resistere a qualche moto, colle velocità* V, C, *i loro momenti* M, P, *saranno proporzionali alle dette velocità.*

IMperocchè, siccome una tal potenza, colla velocità *V* ha un tal momento *M*, così con un altro eguale grado di velocità, avrebbe altrettanto momento (Ass. 1.) di manierachè, moltiplicandosi quan-

quanto si voglia la sua velocità, e diventando per esempio $3V$, acquisterebbe detta potenza un momento $3M$, altrettanto moltiplice del primo, e similmente, se la stessa, ovvero un altra potenza eguale, applicandosi colla velocità C, ha un certo momento P, moltiplicandosi la detta volocità, e diventando per esempio $4C$, si moltiplicherebbe altrettanto il suo momento, e diventerebbe $4P$; secondo poi, che fosse maggiore la velocità $3V$ della velocità $4C$, sarebbe ancora il momento $3M$ maggiore di $4P$ (per lo stesso Ass. 1.) e se la prima fosse minore, o eguale alla seconda, riuscirebbe pure il terzo minore, o eguale al quarto; dunque delle quattro quantità V, C, M, P, accordandosi gli egualmente moltiplici della prima, e della terza in superare, eguagliare, o mancare, dagli egualmente moltiplici della seconda, e della quarta, sarà V a C, come M a P. Il che &c.

COROLLARI.

I. Quindi in una stadera, o vette, o altro strumento mobile d'intorno al centro B, se il peso K pendente dal punto C, dovrà muoversi da una potenza motrice, applicatavi in varie distanze dal centro del moto, come in D, ovvero in E, tirando in ciascun punto, colla medesima direzione perpendicolare, saranno i momenti della potenza, proporzionali alle distanze DB, EB; imperciocchè, alzandosi il peso K per l'arco CH, la potenza motrice posta in D si moverà per l'arco DG, e posta in E, si moverebbe nello stesso tempo per l'arco EF: sicchè gli spazj fatti nel medesimo tempo, essendo come le velocità (Prop. 2.), sarà la velocità Fig. 9. 10.

tà della potenza posta in *D*, alla velocità della medesima posta in *E*, come l'arco *DG*, all'arco *EF*, i quali essendo simili, comecchè opposti allo stesso angolo centrale *B*, sono come i loro raggi, cioè come le distanze dal centro del moto *DB*, *EB*, dunque le velocità, e però i momenti della stessa potenza, sono proporzionali alle distanze dal centro del moto.

II. Quindi si ha la ragione, perchè riesca più facile aprire una porta, o l'imposta d'una finestra, o 'l coperchio d'una cassa, applicando la mano nel luogo più lontano dagli arpioni, o cardini, sopra de' quali deve rivolgersi, che applicandola più vicino; siccome ancora, perchè gli strumenti di manico più lungo, più comodamente si adoprino, e perchè gli alberi più alti, siano più agevolmente sradicati dal vento, che i più bassi in parità di circostanze, e così di mille altri effetti discorrendo, de' quali l'unica universal cagione sì è, perchè cresce il momento della potenza, quando si applica in maggiore distanza dal centro del moto, avendo ivi maggior velocità.

PROPOSIZIONE V.

Se due potenze disuguali A, B *si appplicano con si-*
Fig. 11. *mili direzione a movere un corpo, o a resistere al moto con una stessa velocità, i loro momenti* M, P, *saranno proporzionali alle potenze.*

IMperocchè se la potenza *A* con tale velocità ha il momento *M*, aggiuntavi un altra eguale potenza ad operare, colla stessa velocità, si accrescerebbe altrettanta quantità di momento (per

l'Ass. 2.)

l' Aſs. 2.), ſicchè una tripla potenza, avrebbe triplo momento, ed una quadrupla lo avrebbe quadruplo &c. Preſa dunque qualunque moltiplice della prima potenza, per eſempio $3A$, li corriſponderebbe un momento egualmente moltiplice $3M$, e preſo il quadruplo della ſeconda potenza, cioè $4B$, avrebbe queſta un momento $4P$, ed eſſendo $3A$ maggiore, minore, o eguale a $4B$, ſarebbe altresì $3M$ maggiore, minore, o eguale a $4P$, dunque ſta A a B, come M a P. Il che &c.

COROLLARIO.

Quindi nella ſteſſa diſtanza dal centro del moto, dove qualunque potenza applicata, deſcrivendo lo ſteſſo arco, averebbe la medeſima velocità, ſaranno ſempre i momenti proporzionali alle potenze applicate, purchè ſi muovano colla ſteſſa direzione.

PROPOSIZIONE VI.

I momenti M, P *di due potenze* A, B, *operanti colle velocità* V, C, *ſono in ragione compoſta di quella delle medeſime potenze, e di quella delle velocità.* Fig. 12.

SUppongaſi, che la Potenza A, operaſſe coll' altra velocità C, ed aveſſe un momento D, ſarà M a D, come la velocità V, alla velocità C, (per la Prop. 4.) ed il momento D, all' altro momento P, ſarà come A a B (per la Prop. 5.) dunque il momento M al momento P, avendo ragione compoſta di M a D, e di D a P, ſarà in ragione compoſta di quella della velocità, e di quella delle potenze. Il che &c.

Co-

COROLLARI.

I. Dunque i momenti de' peſi, o delle potenze applicate a qualſivoglia macchina, come vette, ſtadera, ruota &c. mobile d' intorno a qualche centro, ſono in ragione compoſta di quella de i detti peſi, o potenze, e di quella delle loro diſtanze dal centro del moto, le quali ſono come le velocità per le coſe dette di ſopra.

Fig. 13. II. Se dalle linee *A*, *B*, proporzionali alle potenze, e dall' altre *V*, *C*, proporzionali alle velocità, ſi faranno i rettangoli *AV*, *BC*, ſaranno i momenti, come tali rettangoli, avendo ancor queſti la ragione compoſta de' lati (per la Prop. 23. lib. 6. degl' Elem.)

PROPOSIZIONE VII.

Quando ſtia la potenza A, *alla potenza B, come reciprocamente la velocità* C *della ſeconda, alla velocità* V *della prima, i loro momenti ſaranno eguali, e qualunque volta due momenti ſi trovano eguali, biſogna, che le potenze ſiano reciproche alle velocità loro.*

Fig. 13.

POichè i momenti, eſſendo come i rettangoli fatti da ciaſcuna potenza colla ſua velocità, cioè come *AV* a *BC* (per il Coroll. 2. Prop. preced.) e quando *A*, ſta a *B* reciprocamente, come *C* a *V*, riſultando detti rettangoli eguali (Prop. 14. lib. 6. degl' Elem.) dunque i momenti, che loro corriſpondono ſono eguali, e quando ſono altresì i momenti eguali, dovendo eſſer eguali i detti rettangoli, conviene, che i lati loro ſiano reciprocamente

te

te proporzionali, e però dovrà eſſere la potenza *A*, alla *B*, come la velocità *C* di queſta, alla velocità *V* di quella. Il che &c.

COROLLARI.

I. Sarà dunque equilibrio tra due potenze contrappoſte, ed applicate a muovere una macchina mobile intorno a qualche centro, qualunque volta le potenze ſieno reciprocamente proporzionali alle diſtanze loro dal centro del moto, perchè, eſſendo dette diſtanze, come le velocità, ne riſulteranno dall' una, e dall' altra banda eguali momenti, e la macchina rimarrà immobile fra gli sforzi contrarj di tali potenze (per l' Aſs. 4.) e qualunque volta la macchina reſta immobile, conviene, che le oppoſte potenze applicatevi ſieno reciproche alle diſtanze dal centro del moto, dovendo avere momenti eguali (per l' Aſs. 5.)

II. Ma ſe la ragione della prima potenza *A*, alla ſeconda *B*, foſſe maggiore di quella della velocità *C*, alla *V*, ovvero ſe la velocità *V*, alla *C*, aveſſe maggior ragione, che non ha la potenza *B*, alla *A*, ſarebbe allora maggiore il momento di *A*, che il momento di *B*, perchè il rettangolo *AV*, ſarebbe maggiore di *BC*, avendo un lato maggiore di quello, che biſognerebbe per eguagliare l'altro rettangolo, cioè più lungo di quello, che ricercherebbe la proporzione reciproca di eſſi lati; onde allora la potenza *A*, dovrà prevalere alla *B*, e lo ſteſſo dicaſi delle diſtanze dal centro del moto, che ſono come le velocità; onde quando ſi fa l'equilibrio tra due potenze a cui ſono reciprocamente proporzionali le diſtanze dal centro del moto

to, se si accrescerà da una parte o la distanza, o la potenza, questa averà maggior momento dell' altra, e dovrà prevalerli movendola.

CAPITOLO III.

Del Centro di Gravità.

PROPOSIZIONE VIII.

Un corpo FG *comunque attaccato, o appoggiato ad un sostegno* A, *d' intorno a cui possa liberamente muoversi, allora solamente starà fermo, quando la retta, che connette il centro della terra* C, *col centro di gravità* B, *di esso corpo, passa per lo punto dell' attaccamento, e dell' appoggio* A, *sicchè i tre punti* A, B, C, *sieno in una medesima linea perpendicolare all' Orizzonte.*

Tav. II. Fig. 14. IMperciocchè per la prima supposizione il centro di gravità di qualunque corpo, cerca di accostarsi quanto mai può al centro della terra: ma quando la retta *CB*, non passa per l' attacco, o per l' appoggio *A*, tirata la retta *AC*, e dal punto *B*, l' orizzontale *BH*, essendo l' angolo *AHB* retto, congiunta la *AB*, farà l' angolo *ABH* acuto, onde descritto col raggio *AB*, l' arco circolare *BD*, verrà l' arco *BD* sotto l' orizzontale *BH*, da cui esso cerchio è segato, e però il centro *B*, potrà discendere per detto arco *BD*. sotto la detta orizzontale, accostandosi così al centro della terra; dunque non starà mai fermo, se non quando gli

tre

tre punti *A*, *B*, *C*, ſaranno nella medeſima retta linea perpendicolare all' orizzonte . Il che &c.

COROLLARI.

I. Dunque ſe ſi ſoſpenderà col filo *AD*, il corpo *DGEF*, e con eſſo un filo, da cui penda il piombo *C*, quando il tutto ſtarà fermo, ſegnando in detto corpo la retta *DE* coperta da eſſo filo, ſaremo ſicuri, che in eſſa linea *DE*, ritrovaſi il centro di gravità di quel corpo, e di nuovo ſoſpendendo il medeſimo corpo per un altro punto *F*, dal medeſimo ſoſtegno *A*, e ſimilmente, ſegnando in eſſo la retta *FG*, coperta dal filo del piombo *C*, nell' interſezione di ambe queſte linee, corriſponderà il centro di gravità *B* di un tal corpo, dovendo eſſere in ciaſcuna di dette linee moſtrate dalla direzione *AC*, che và dal ſoſtegno *A*, verſo il centro della terra. Fig. 15.

II. Se nel corpo *FADEG* appoggiato ſopra un piano ſtabile, ed orizzontale nella baſe *FG*, la retta *BH*, condotta dal ſuo centro di gravità *B*, perpendicolare all' orizzonte, uſcirà fuori della baſe, il corpo caderà, ma ſe batterà dentro eſſa baſe, rimarrà il corpo eretto: perchè nel primo caſo la retta, che va dal centro di gravità al centro della terra, non paſſa per verun punto d' appoggio, o di ſoſtegno, ma bensì nel ſecondo caſo. Fig. 16.

III. E così la Torre *FAEG* ſe ſarà talmente inclinata, che la retta *BH*, la quale dal ſuo centro di gravità viene perpendicolare all' orizzonte, non cada fuori del contorno della ſua baſe, potrà ſtare in piedi, ancorchè foſſe da' fondamenti ſuoi ſeparata, e poſata ſemplicemente ſul ſuolo, purchè

al-

altronde ſieno ben collegate, e conneſſe le parti ſue componenti, ſicchè faccia un ſolo corpo, ma ſe la detta perpendicolare caſcherà fuori dell' orlo della ſua baſe, non potrà ſoſtenerſi, ſe non per forza del concatenamento, che potrà avere col ſuolo per mezzo de' fondamenti, ſopra de' quali ſi regge.

Fig.17. IV. Se un corpo *ADF* è poſto talmente ſopra un piano inclinato *EG*, che la retta *BI*, perpendicolare all' orizzonte, tirata dal ſuo centro di gravità *B*, paſſerà per qualche punto della ſua baſe *EF*, verrà giù ſtriſciando per detto piano, ma

Fig.18. ſe caſcherà fuori di eſſa baſe, ſi rivolterà il corpo per detto piano, perchè il centro di gravità potrà maggiormente diſcendere rivoltandoſi il corpo mobile, e quindi è, che una sfera ſempre diſcen-

Fig.19. derà per un piano ravvolgendoſi in ſe medeſima, e non placidamente ſtriſciando, perchè la retta *BH*, che va perpendicolare all' orizzonte tirata dal ſuo centro, fa ſempre angolo acuto col piano inclinato *GF*; onde non può paſſare per lo contatto *F* della palla col piano, nè convenire colla retta *BF*, che connette il centro di gravità di eſſa palla col ſuo appoggio *F*, e ſempre è perpendicolare al detto piano inclinato, e non all' orizzonte, e però non paſſa pel centro della terra.

PROPOSIZIONE IX.

Propoſti due corpi A, B, *trovare il loro centro di gravità.*

Fig.20. SI connetta il centro particolare di gravità di ciaſcuno colla retta *AB*, e queſta dividaſi in *C*, in ragione reciproca a' medeſimi corpi; cioè a' loro

ro pezzi, onde ſtia *A* a *B*, come *BC* a *CA*: dico, che *C* è il centro comune di gravità d' ambedue i corpi propoſti.

Perchè inteſa la retta *AB*, come un filo rigido, che gli connetta, e ſoſtenendoſi il punto *C*, averanno i corpi *A*, e *B* egual momento, d' intorno al centro *C* (per il Coroll. primo della Prop. 7) dunque (per la Defin. 11.) ſarà *C* il centro di gravità d' ambidue.

COROLLARI.

I. Quindi è chiaro, che il centro di gravità di due corpi è nella retta, che congiunge i loro centri particolari, e che ſe una retta condotta per lo centro comune di due corpi paſſa per lo centro particolare di uno di eſſi, doverà ancora paſſare per lo centro dell' altro.

II. Volendo trovare il centro di gravità di tre corpi, o di più ancora, trovato il centro *C*, di due *A*, *B*, ſi connetta col centro del terzo corpo *D*, e diviſa la retta *CD* in *E*, di maniera che ſia *DE*, ad *EC*, come l' aggregato de' corpi *A*, *B*, al corpo *D*, ſarà *E* il centro di queſti tre corpi; imperocchè ſoſpendendoſi dal punto *E* un filo rigido *DC*, ſaranno in equilibrio i due corpi *AB* col terzo *D*, eſſendo quegli a queſto, come reciprocamente la diſtanza *DE* alla *CE*. Fig. 21.

III. Se ſi attribuiſce la gravità ancora alle linee, ed alle ſuperficie, è manifeſto, che il centro di gravità d' una linea retta, è nel mezzo di eſſa, e che di una circonferenza di circolo, ed ancora del piano di eſſo, il centro di gravità è il medeſimo, che il centro di tal grandezza, e lo ſteſſo può dirſi

di qualunque ſuperficie sferica, ſiccome delle sfere medeſime, eſſendo d'intorno al detto punto per ogni verſo parti eguali, dotate di eguale gravità, ed in diſtanza eguale dal centro, avendo eguale momento. Anzi in qualunque figura piana, o ſolida, avendo un diametro, che tagli per mezzo tutte le ſue ordinate, o che paſſi per lo centro di tutte le ſue ſezioni parallele, il centro di tale figura ſarà in eſſo diametro, e però quando vi ſiano due diametri diverſi concorrenti in un punto, il centro di gravità di tal figura, ſarà in detto concorſo, dovendo eſſere in ciaſcheduno di eſſi diametri, ſopra i quali reggendoſi, tutte le ordinate fanno equilibrio, eſſendo diviſe per mezzo, oppure avendo il loro centro in detti diametri.

Fig 22. IV. Specialmente in ogni triangolo *ABC*, diviſo per mezzo un lato *AB*, in *E*, ſe ſi congiunge coll' angolo oppoſto la *CE*, e diviſo un' altro lato *AC* per mezzo in *D*, congiungendo all' angolo oppoſto la *BD*, il concorſo di queſta coll' altra *CE*, cioè il punto *F*, ſarà il centro di gravità di eſſo triangolo, e ſarà ſempre la parte del diametro *FD*, verſo la baſe *AC*, un terzo di tutta la *DB*, e così *FE* un terzo di tutta la *EC*. Imperocchè congiunta la *DE*, ſarà parallela a *CB*, ſegando per mezzo amendue gli altri lati, e ſarà *CB* doppia di *DE*, ſiccome *CA* è dupla di *AD*; ma per la ſimilitudine de' triangoli *CFB*, *DFE*, ſarà *BF*, ad *FD*, come *CB* a *DE*; dunque *BF* è dupla di *FD*; onde queſta ſarà un terzo di tutta la *DB*.

V. Nello ſteſso modo ſi potrà ritrovare il centro di qualunque figura rettilinea, riſolvendola in triangoli, e congiungendo i loro centri di gravità,

poi

poi dividendo la linea, che gli connette in ragione reciproca di essi triangoli.

VI. Per trovare il centro di gravità di una Piramide triangolare *ABCD*, si tirino gli diametri *CE*, *AE* de' due triangoli *BCD*, *ABD*, e tagliate le parti *EH*, *EF* di detti diametri, che sieno un terzo di essi, congiunte *CF*, *AH*, le quali si segheranno in *I*, sarà questo *I* centro di gravità di essa Piramide; imperocchè passando *AH* per lo centro di gravità delle base *BDC*, passerà per gli centri di gravità di tutte le sezioni triangolari parallele a detta base, onde il centro della Piramide dovrà essere in essa *AH*, ma deve essere ancora nell' altra *CF*, la quale passando per lo centro di gravità del triangolo *ABD*, passa ancora per tutti gli centri delle sezioni parallele ad esso *ABD*, dunque nel concorso *I* delle rette *AH*, *CF*, si troverà il centro di essa Piramide, ed è lontano dalla base per la parte *IH*, che è un quarto di tutta la *AH*; imperocchè congiunta *HF*, essendo simili i triangoli *FIH*, *AIC*, sarà *AI* ad *IH*, come *AC* ad *FH*, o come *AE* ad *EF*, e però *AI* e tripla di *IH*, onde *AH* sarà quadrupla di essa *IH*. Fig. 23.

VII. Anche in un cono il centro di gravità sarà nella quarta parte dell' asse verso la base, potendo il cono risolversi in una Piramide di base Poligona d' innumerabili lati, e qualunque Piramide, che abbia per base un Poligono averà il centro distante dalla sua base per un quarto dell' altezza del proprio asse, potendo risolversi in molte Piramidi triangolari, il cui centro è sempre lontano dalla base un quarto del suo asse, e però è in un piano parallelo alla medesima base, condotto per la quarta parte dell' asse di mezzo.

PROPOSIZIONE X.

Fig. 24. *Se in due libre eguali* AB, FH *ſi diſpongono alcuni peſi omogenei nell' una, ed altri tra di loro omogenei nell' altra, in maniera che, eſſendo attaccati in diſtanze eguali, ſieno proporzionali, ovvero, ſe le libre* AB, FH *foſſero diſuguali, ed i peſi nell' una, proporzionali a' peſi nell' altra, foſſero diſpoſti in diſtanze proporzionali alle medeſime libre, il centro di gravità della prima, dividerà nella ſteſſa ragione la lunghezza di eſſa libra, come il centro di tutti i peſi della ſeconda, dividerà la lunghezza di eſſa.*

IMperocchè eſſendo *A* a *C*, come *F* ad *E*, ſe delle due prime il centro di gravità è *S*, e delle due ſeconde il centro ſia *R*, ſarà *SC* ad *SA*, come *A* a *C*, cioè come *F* ad *E*, e però come *RE* ad *RF*; onde componendo *CA* ad *AS*, ſarà come *EF* ad *FR*, onde nelle libre eguali eſſendo *AC*, eguale ad *FE*, ſarà ancora *AS*, eguale ad *RF*, e nelle libre diſuguali eſſendo *AC*, ad *FE*, come tutta la *AB* a tutta la *FH*, ancora *AS* ad *FR*, ſarà nella medeſima proporzione. In oltre ſe *M*, ed *N* ſono i centri delle tre grandezze *A, C, D*, e delle tre altre *F, E, G*, ſarà *MS* ad *MD*, come la grandezza *D* alle due *A, C*, cioè come la grandezza *G*, alle due *E, F*, che ſi ſuppongono proporzionali alle altre, e però ancora come *RN* ad *NG*, così ſarà *SM* ad *MD*, ed invertendo, e componendo *DS* ad *SM*, ſarà come *GR* ad *RN*, onde eſſendo la prima alla terza eguale, o proporzionale, come *AB* ad *FH*, ancora la ſeconda ſarà eguale, o proporzionale alla quarta, e però aggiunte *AS, FR*, che

ſo-

ſono pure eguali, o proporzionali, ſarà altresì MA eguale, o proporzionale ad NF: con ſimil progreſſo ſi proverà parimente, che il centro comune di più grandezze diſpoſte nella prima libra, ed il centro comune dell' altre proporzionali nella ſeconda libra, dividono eſse libre egualmente, ſe ſono eguali, o in parti proporzionali ad eſse, ſe ſono diſuguali, che però, eſsendo P il centro di tutte quattro le grandezze A, C, D, B, ed eſsendo Q il centro delle altre quattro F, E, G, H, proporzionali alle prime, ſarà AB ad FH, come AP ad FQ. Il che &c.

COROLLARI.

I. Quindi nelle figure egualmente alte, le cui ſezioni parallele alla baſe ſiano proporzionali (le quali ſi chiamano da' Geometri figure *Analoghe*) i loro centri di gravità ſaranno nel loro diametro, egualmente diſtanti dalle baſi, eſſendo detti diametri come libre, cariche della gravità di dette ſezioni parallele per lo centro di cui paſſano, ed è il medeſimo il centro di gravità di eſſe figure, che il centro di gravità di tutte quante quelle ſezioni. Onde quindi appariſce, che il centro di gravità del cono, egualmente è diſtante dalla baſe per un quarto del ſuo Aſse, come il centro di gravità di qualſivoglia Piramide, perchè le ſezioni delle Piramidi parallele alla baſe, ſono proporzionali a' cerchi, che ſegano il cono in eguale diſtanza, e così Fig. 25. ancora un Conoide Parabolico $EDCBA$ ha il centro di gravità diſtante dalla baſe per l'intervallo IN, che è un terzo dell' Aſse CI, uguale alla diſtanza del centro di gravità del triangolo ECA, egualmente

te alto, perocchè nel triangolo ſta *EA* ad *FG*, come *IC* a *CH*, o come il quadrato *IE*, al quadrato dell' ordinata *DH* nella parabola, e però ſta come il cerchio *EA* al cerchio *BD* del Conoide.

II. Similmente, quando le figure hanno le loro ſezioni proporzionali, le quali dividono proporzionalmente i loro diametri diſuguali, i loro centri di gravità ſaranno diſtanti dalle loro baſi proporzionalmente alle loro altezze, come per eſempio, eſſendo due Parabole *BAH*, *CAD*, i loro centri di gravità ſaranno lontani dalle baſi in certe diſtanze proporzionali alle altezze *AB*, *AC*, perchè congiunta la retta *BC*, e tiratali una parallela *GE*, e condotte l' ordinate *GI*, *EF*, eſſendo *CA* ad *AE*, come *BA* ad *AG*, e nella prima ragione eſſendo il quadrato *CD*, al quadrato *EF*, e nella ſeconda il quadrato *BH* al quadrato *GI*, ſono adunque proporzionali l' ordinate *CD*, *EF*, alle ordinate *BH*, *GI*, le quali ſegano proporzionalmente l' altezze *CA*, *AB*, onde ſiccome nella Parabola *CAD* il ſuo centro di gravità ſarà diſtante dalla baſe per due quinti dell' altezza *AC*, così il centro di gravità dell' altra *BAH*, ſarà diſtante dalla baſe per due quinti dell' altezza *AB*. Fig. 26.

PROPOSIZIONE XI.

Fig. 27. *Eſſendo più grandezze* A, B, D *ſopra la retta* HL, *ſopra cui ſi conducono da i loro centri particolari, e dal comune* K *le rette* AH, BM, DL, KI *tra di loro parallele, o perpendicolari ad eſſa* HL, *ſaranno i prodotti di ciaſcheduna nella ſua diſtanza, cioè* A *in* AH, B *in* BM, *e* D *in* DL, *eguali al prodot-*

dotto di tutte insieme le grandezze A, B, D *nella distanza* KI *del loro centro comune.*

SIa delle due *A*, *B* il centro *C*, e conducasi *ECF* parallela ad *HL*, segante le rette *AH*, *BM*, ne punti *E*, *F*, sarà per la similitudine de' triangoli *AE* a *BF*, come *AC* a *CB*, cioè come *B* ad *A*, dunque il prodotto dell' estreme *A* in *AE* eguaglia il prodotto delle medie *B* in *BF*, ed è quello, l' eccesso di *A* in *AH* sopra il prodotto di *A* in *CG*, che eguaglia la *EH*, ed il secondo l' eccesso di *B* in *CG*, che eguaglia la *FM* sopra il prodotto di B in *BM*; dunque sono Aritmeticamente proporzionali *A* in *AH*, *A* in *CG*, *B* in *CG*, *B* in *BM*, e però la somma delle estreme *A* in *AH*, *B* in *BM* eguaglia la somma delle medie *A*, e *B* in *CG*. Nella stessa maniera si proverà, che poste *A* e *B* insieme nel suo centro *C*, il prodotto di *A*, e *B* in *CG*, col prodotto della grandezza *D* in *DL*, eguaglieranno il prodotto di *A*, *B*, e *D* nella *KI*; dunque i prodotti di *A* in *AH*, di *B* in *BM*, e della *D* in *DL*, eguagliano il prodotto di *A*, *B*, *D*, in *KI*, e così sempre quando vi fossero più grandezze. Il che &c.

I. Se la retta *HL* passasse per lo centro *K* di più grandezze *A*, *B*, *R*, *D*, i prodotti di *A* in *AH*, e di *B* in *BM*, che sono da una parte, eguaglieranno i prodotti di *R* in *RT*, e della *D* in *DL*, che sono dalla parte opposta; imperocchè dal centro *C* delle due *A*, *B*, e dal centro *P* delle altre *R*, *D* condotte parallele *CG*, *PV*, saranno i prodotti di *A* in *AH*, e di *B* in *BM*, eguali al prodotto di *A*, e di *B* nella *CG*, il quale prodotto eguaglierebbe quello di *R*, e di *D* in *PV*, e questo sarebbe eguale ad *R* Fig. 28.

in *RT*, & a *D* in *DL*; dunque i prodotti *A* in *AH*, e *B* in *BM* eguagliano gl' altri *R* in *RT*, e *D* in *DL*.

Tav. III. Fig. 29. II. Se poi la retta *HL*, aveſſe da una parte alcune grandezze *R*, *D*, e dall' altra le grandezze *A*, B col centro *K* comune a tutte, ſarà l' eccesſo de' prodotti *A* in *AH*, e *B* in *BM*, ſopra agli oppoſti prodotti *R* in *RT*, e *D* in *DL*, eguale al prodotto di tutte le grandezze *A*, *B*, *D*, *R*, nella diſtanza *KI* del centro loro comune: perchè condotta per *K* la *EF*, parallela ad *HL*, ſegante eſse rette in *E*, *G*, *V*, *F*, ſaranno *A* in *AE*, con *B* in *BF*, cioè *A* in *AH*, e *B* in *BM*, meno *A*, e *B* in *KI*, eguali a' prodotti di *R* in *RG*, e della *D* in *DV*, gli quali ſono i medeſimi, che *R* in *RT*, e *D* in *DL*, con *R* e *D* in *KI*; dunque *A* in *AH* con *B* in *BM* meno *R* in *RT*, e *D* in *DL*, egualia il prodotto di *A*, *B*, *R*, *D* in *KI*.

Fig. 30. III. Se le grandezze *A*, *B*, *D*, *R* col loro centro comune *C*, ſaranno in una ſteſsa linea retta, in cui ſi pigli un punto *E*, oltre tutte le grandezze, la ſomma de' prodotti *A* in *AE*, *B* in *BE*, *R*, in *RE*, e *D* in *DE*, diviſa per l' aggregato di eſse grandezze *A*, *B*, *R*, *D*, ci darà per quoziente la diſtanza *CE* del loro centro comune da eſso punto *E*; ma ſe queſto punto *E*, ſarà tramezzo alle dette gran-
Fig. 31. dezze, la differenza de' prodotti *A* in *AE*, e *B* in *BE*, da' prodotti *R* in *RE*, e *D* in *DE*, diviſa parimente per l' aggregato di tutte le grandezze *A*, *B*, *R*, *D* ci darà la *CE*; imperocchè queſta moltiplicata in tutte le dette grandezze, eguaglia la ſomma nel primo caſo, e la differenza nel ſecondo de' ſuddetti prodotti per gli antecedenti Corollarj.

IV. Se tutte le grandezze fuſsero eguali, il prodotto di tutte nella diſtanza del loro centro co-

mu-

mune, eguaglierebbe il prodotto di una di loro, in una retta moltiplice di detta distanza, secondo il numero di esse grandezze, ed ancora gli prodotti di ciascheduna di esse, nelle loro distanze, sarebbe eguale al prodotto di una nell' aggregato di tali distanze. Bisogna dunque, che la somma di tutte quelle distanze, ovvero la loro differenza, eguagli il moltiplice della distanza del centro, secondo il numero di esse.

V. Onde essendo dette grandezze eguali, tirata per lo centro comune *K* la retta *HF*, sopra cui si conducano le perpendicolari da esse grandezze, saranno quelle di sopra *AE*, *BF*, eguali a quelle di sotto *GC*, *DH*, e tirando per esso punto *K*, qualsivoglia altra linea *KL*, sopra di cui si tirino altre perpendicolari, o parallele, quelle che sono alla destra *AI*, *DO* eguaglieranno quelle, che sono alla sinistra *CL*, *BM*. Fig. 32.

VI. Ed essendo le Periferie circolari, proporzionali a' loro raggi, girando le grandezze *A*, *B*, *D*, *C* intorno la medesima retta *HF*, i prodotti delle grandeze poste da una parte nelle loro circonferenze, eguaglieranno i prodotti delle altre nelle Periferie da loro descritte, e la somma de' prodotti di quelle, che sono da una parte nelle loro Periferie, eguaglierà il prodotto di tutte esse grandezze, nella Periferia descritta dal comune loro centro di gravità, onde si cava, che una superficie rotonda nata dal giro di qualche curva, sarà eguale al prodotto di essa curva nella Periferia del centro di gravità di essa, descritta in quel moto rotondo; ed un solido rotondo descritto da una superficie *DGAH*, girata intorno l'asse *DH*, eguaglia Fig. 33.

glia il prodotto di essa figura nella Periferia *IP*, dal suo centro di gravità *I* descritta, eguagliando questa tutti i prodotti di qualunque parte *K,L* nelle loro Periferie *KQ*, *LN*, e però la ragione di più superficie, e di più solidi rotondi, che nascono dal girare diverse linee, o diverse superficie, sono sempre in ragione composta di quella di esse linee genitrici, o delle superficie girate, e di quella delle distanze de' loro centri di gravità dell' asse del moto.

CAPITOLO IV.

Del Moto Composto di più Moti Equabili.

PROPOSIZIONE XII.

Fig. 34. *Se un mobile* A, *sarà spinto nello stesso tempo da una forza per la direzione* AD, *e da un altra per la direzione* AG *inclinata a qualche angolo colla prima, tagliando in esse le parti* AD, AG *proporzionali alle velocità impresse nel mobile, secondo le dette direzioni, ovvero proporzionali alle forze stesse, supposto, che imprimasi da ogn' una tutta quella velocità, che nello stesso tempo può dare, e però proporzionali alle dette velocità, si compisca il parallelogrammo* DAGB, *e si tiri il Diametro* AB: *dico, che il mobile anderà per la direzione* AB *con tale velocità, che starà a ciascheduna altra impressali da dette forze, come il medesimo Diametro* AB

a det-

a detti lati corrispondenti all' altre velocità impresseli.

PEr maggior chiarezza si distinguano i soggetti di questi due moti componenti, attribuendo il moto per la direzione *AD* ad una riga, che per essa *AD* si muova parallela a se stessa, promovendosi successivamente dal sito *AG* nel sito *EH*, e quindi passando in *BD* colla velocità *AD*. Il moto poi per *AG* si rifonda in una mosca, o formica, o altro mobile, che intanto scorra per essa riga colla velocità *AG*. E' manifesto, che in vigore di questi due moti nello stesso tempo, in cui la riga averà scorso lo spazio *AE*, passando da *AG* in *EH*, la formica nella riga mobile averà passato lo spazio *EC*, il quale starà allo spazio *AE*, come la velocità *AG*, alla velocità *AD*, (per la Prop. 2.); onde compiendo il parallelogrammo *AECF*, sarà questo simile all' altro *ABDG*, onde (per la 26. del lib. 6. degli Elem.) l' angolo *C*, in cui si troverà la formica trasportata da questi due moti, sarà sempre nello stesso diametro *AB*; dunque il moto composto d' ambidue riesce per la direzione *AB*, e perchè nello stesso tempo si compirà il moto *AB*, ed il moto particolare della riga per *AD*, e della formica per *AG*, sarà dunque la velocità di tal moto composto *AB*, alle velocità impresse per i lati *AD*, *AG*, come il diametro *AB* ad essi lati. Il che &c.

COROLLARI.

I. Viceversa, qualunque semplice moto per *AB* potrà sempre risolversi in due altri *AD*, *AG*, se-

con-

condo le direzioni de' lati d'un parallelogrammo descritto intorno il diametro *A B*, ſupponendo, che per le dette direzioni foſſe ſpinto il mobile con velocità proporzionali a detti lati, in relazione di quella, che è per la *AB*; imperocchè nel medeſimo tempo ſi farà dal mobile il detto viaggio, eſſendo ſemplicemente ſpinto per *AB*, come ſe foſſe ſpinto per le due altre direzioni de' lati con velocità ad eſſi proporzionali.

II. Anzi lo ſteſſo moto per *AB* può intenderſi compoſto in infinite maniere, potendoſi concepire Fig. 35. ſopra la baſe *AB* qualunque triangolo *ADB*, ovvero *AHB*, e compiendoſi i parallelogrammi *ADBG*, *AHBC*, tanto potrà dirſi il moto per *AB* compoſto da' moti collaterali *AD*, *AG*, quanto dagli altri due *AH*, *AC*, ſecondo le velocità eſpreſſe da' medeſimi lati, in relazione a quella del moto per *AB*.

III. Onde è chiaro, che il moto compoſto *AB* talora può eſſer maggiore di ciaſcheduno de' ſuoi componenti, e talora minore di ciaſcheduno di eſſi, ma non mai eguale, o maggiore d' ambidue preſi inſieme, eſſendo ſempre due lati d' un triangolo, *AD*, *BD*, maggiori del terzo *AB*, e però ancora *AD* con *AG* (il quale eguaglia *DB*) devono eſſer maggiori del compoſto moto *AB*.

SCOLLIO.

Si avverta però, che ſe i moti componenti *AD*, *AG* ſono ad angoli retti, ſarà l' uno indifferente all' altro, ſenza che l' uno tolga, o aggiunga all' altro veruna parte di moto per la ſua direzione, ma quando ſono ad angoli obliqui, come *AD*, *AI*,

ad

ad angolo ottuſo, ovvero *AH*, *AC* ad angolo acuto, l' uno de' moti porta qualche alterazione all' altro, eſſendo nel primo caſo in qualche maniera oppoſti, cioè diretti alle parti *AI* contrarie in riguardo al punto *A*, d' onde ſi parte il mobile, ma nel ſecondo caſo in qualche modo coſpirano verſo i termini *A*, e *B* poſti dalle medeſime parti del punto *A*, d' onde ſi ſuppone partire il mobile; e però è meglio riſolvere il moto *AB* ne' moti *AD*, *AG* poſti ad angoli retti, che in qualunque altra delle infinite maniere di moti obliqui, eſſendo la prima compoſizione più naturale della ſeconda.

PROPOSIZIONE XIII.

Se un mobile è ſpinto da quante ſi vogliano forze, per altrettante direzioni: trovare la direzione, e la velocità del moto compoſto, che ne deve riſultare. Fig.36.

Siano le direzioni *BA*, *CA*, *DA* tagliate nella ſteſſa proporzione delle velocità impreſſe al mobile *A*, ſe queſte ſono ſopra una medeſima linea retta, e dirette alla medeſima parte, ſi prenda *AG* eguale alla ſomma di tutte l' altre *BA*, *CA*, *DA*, ſarà queſta *AG* la direzione, e velocità di tutte le forze propoſte, che coſpirano a ſpingere il mobile verſo la medeſima parte, ma ſe alcune ſpingono verſo una parte, come *BA*, *CA*, ed un' altra *DA* ſpinge all' oppoſto, ſe foſſe *AD* eguale alle altre due *AC*, *AB*, il mobile *A*, ſtarebbe immobile, e però non ne riſulterebbe alcun moto (per l' Aſs. 4.): ma ſe ſono diſuguali quelle, che ſpingono da una parte, a quelle che ſpingono dall' altra oppoſta, pigliſi *AG*, eguale all' ec- Fig.37.

ceſ-

ceſſo delle due AB, AC, ſopra l'altra contraria AD, ſarà eſſa AG, diretta verſo la parte a cui ſpingono le forze prevalenti, la direzione, e la velocità del moto compoſto; imperocchè ſolamente l'eccesſo delle maggiori velocità AB, AC ſopra la contraria AD, può avere il ſuo effetto, eſſendo le parti eguali contrarie, adattate a reprimere il moto, e tenere in quiete il mobile A; ma ſe finalFig 38. mente le date direzioni non ſono nella medeſima linea retta, ma inclinate a varj angoli, o nello ſteſſo piano, o in diverſi piani, ſe ne compongano due inſieme AB, AD, con fare il parallelogrammo $ADBE$, e tirato il diametro AE, che moſtra la direzione compoſta di quelle due, ſi componga colla terza AC, facendo il parallelogrammo $EACG$, ſarà la direzione, e velocità AG, compoſta di tutte tre le AB, AC, AD, come è manifeſto dall'antecedente propoſizione, e ſe vi foſſero altre direzioni, con cui foſſe ſpinto il mobile, ſimilmente componendo la compoſta AG, colle altre, ſi troverebbe la direzione, e la velocità compoſta di tutte. Il che &c.

COROLLARI.

Fig 39. I. Se fuſſe il punto I centro di gravità de' punti B, C, D, cioè di gravi eguali poſti in quei termini, a cui ſono dirette le forze, che ſpingono il mobile A; congiunta la retta AI, e fatta AG moltiplice di AI, ſecondo il numero di tali punti, cioè in queſto caſo tripla, ſarà eſſa AG la direzione, e velocità ricercata; imperciocchè condotta per lo punto A qualunque retta LM, ſopra cui ſiano tirate le perpendicolari CL, BM, DP, IO, è ma-

è manifeſto (dal Coroll. 4. della Prop. 11.) che la ſomma, o la differenza delle perpendicolari *CL*, *BM*, *DP*, è tripla della perpendicolare *IO*, e che la ſomma, o la differenza delle diſtanze *AM*, *AL*, *AP*, (s'intende la ſomma di quelle, che ſono dalla medeſima parte, ovvero la differenza di quelle, che ſono da una parte, e di quelle che rimangono dalla parte oppoſta) è tripla della diſtanza *OA*; ma condotta la perpendicolare *GN*, e compiuto il rettangolo *ANGS*, ſarà *GN* tripla di *IO*, ed *AN*, ovvero *GS*, tripla di *AO*, per la ſimilitudine de' triangoli *AIO*, *AGN*, in cui *GA* ſi è fatta tripla di *AI*; dunque la direzione, e velocità *AG* è quella ſteſſa, che deve riſultare al mobile *A*, ſollecitato dalle velocità, e direzioni *AB*, *AC*, *AD*, eſsendo *AG* compoſta di *AN*, eguale alla ſomma, o alla differenza delle velocità, che riſultano per la direzione *AN*, e dalla *GN*, parimente eguale alla ſomma delle velocità conſpiranti ſecondo la perpendicolare *AS*, o alla differenza di eſse direzioni, e velocità contrarie.

II. Se oltre le forze ſuddette *AB*, *AC*, *AD*, vi foſse un' altra forza *AH*, che ſpingeſse il mobile ſecondo la direzione oppoſta a quella *AG*, che ſi compone delle tre prime, e con velocità eguale ad eſsa, è manifeſto, che il mobile *A* rimarrebbe in equilibrio fra tutte queſte forze, eſsendo eguale la velocità *AH* alla velocità *AG*, riſultante dall'altre.

III. Se il centro di gravità dei punti *B*, *C*, *D*, cadeſse nel punto *A*, il mobile rimarrebbe immoto, non eſsendovi veruna diſtanza *AI* il cui moltipli-

tiplice dovrebbe fare la direzione, e la velocità del moto compoſto, e però rimarrebbe in equilibrio il mobile tra le forze, che lo ſpingono per varie vie.

IV. E per ragione converſa, ſe il mobile tra più forze, che lo vanno ſpingendo, conſiſte immobile, biſogna, che eſso mobile ſi trovi collocato nel centro di gravità de' termini *B*, *C*, *D*, a cui nello ſteſſo tempo vorrebbero ſpingerlo quelle forze, perchè ſe il centro di gravità di eſſi punti foſse fuori del centro *A*, per eſempio in *I*, dovrebbe muoverſi il mobile per la direzione *AIG*, poſta *AG* moltiplice di *AI* ſecondo il numero di detti termini, cioè di dette forze.

PROPOSIZIONE XIV.

Fig. 40. *Se il mobile* A *ſta in equilibrio frà le tre forze* E, P, F, *che lo tirano per le direzioni* AC, AD, AB, *prolungando una di eſſe per eſempio* AD *oltre l'angolo* CAB, *ed in eſsa preſo qualſivoglia punto* G, *tirate le* GB, GC, *parallele all' altre direzioni; onde riſulti il parallelogrammo* BACG, *ſaranno le forze* E, P, F, *come i lati* AC, AB, AG, *di eſſo parallelogrammo.*

IMperocchè, ſtando equilibrate le forze ſuddette, biſogna, che due qualunque di eſſe, per eſempio *F*, ed *E*, contraſtino con eguale sforzo contro la terza *P*, imprimendo nel mobile una velocità eguale a quella, che viene impreſsa dalla forza *P*, ma diretta alla banda oppoſta per eluderne ogni effetto (ſecondo l' Aſs 5.) ma alla direzione della forza *P*, che tira per *AD*, niuna altra

tra direttamente ſi oppone, ſe non queſta *AG*, dunque biſogna, che lo ſforzo d' ambedue le forze *E*, *F*, ritiri il mobile *A*, appunto per la direzione *AG*, ma queſte forze tirano il mobile ſecondo il diametro d' un parallelogrammo, fatto ſopra i lati delle loro direzioni, e proporzionali alle medeſime forze, e velocità, che s' imprimono da eſſe, dunque biſogna, che la retta *AG*, oppoſta alla direzione *AD*, dell' altra forza *P*, ſia il diametro d' un parallelogrammo fatto nell' angolo *BAC*, co' lati proporzionali alle ſteſſe forze *E*, *F*, o alle velocità da loro impreſſe, non potendo ſervire la linea *AG* per diametro d' altri parallelogrammi fatti nell'angolo *BAC*, fuorichè al medeſimo *BACG*, o ad altri ſimili ad eſſo, che averebbero i lati, ed il diametro nella ſteſſa proporzione; dunque biſogna, che *AB*, ed *AC*, ſieno proporzionali alle forze *F*, *E*, ed *AG*, proporzionale all' altra *P*. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se un corpo *PH*, il cui centro *X*, è ſoſpeſo da due funicelle *PE*, *HF* non perpendicolari all'orizzonte, e però tra di loro non parallele, le quali prolungate converrebbero in *G*, biſogna, che la direzione *AX* del centro di gravità di tal corpo, che è perpendicolare all' orizzonte, convenga con l' altre due direzioni nel medeſimo punto *G*. Imperocchè dovendoſi fare equilibrio tra le forze ſoſtenenti *E*, *F*, ed il peſo di eſſo corpo, biſogna, che la direzione di queſto ſia per il diritto al diametro *AG* del parallelogrammo fatto ſopra dette direzioni delle forze ſoſtenenti, in cui coſpirano le direzioni *BG*, *CG* di dette forze. Tav. IV. Fig. 41.

II. Similmente date tre forze F, E, P, due del-
Tav.III. le quali ſieno maggiori della terza, ſi troveranno
Fig.40. le direzioni per cui ſarebbero in equilibrio, con fare un triangolo ABG di lati proporzionali alle dette forze, e compiendo il parallelogrammo $BACG$: perchè allora eſſendo dette direzioni AB, AC proporzionali alle forze F, E, le quali ſecondo la direzione AG, compoſta di eſſe, tirerebbero il punto A verſo G, ſe la potenza P proporzionale ad AG,
Tav.IV. s'intenderà tirare per l'oppoſta direzione, ſtaran-
Fig.42. no in equilibrio: oppure baſterebbe fare un triangolo ILK di lati parimente proporzionali alle date forze, e ſopra ciaſcuno di eſſi tirando le perpendicolari GR, GM, GO, dalle quali riſulterà il parallelogrammo $ABGC$, e ſaranno determinate le direzioni, per cui dette forze ſtaranno in equilibrio. Imperocchè allora il triangolo ILK, ſarà ſimile a ciaſcheduno degli altri due ABG, ACG, perchè eſſendo retti gli angoli GRK, GOK, un cerchio paſſerebbe per gli punti G, R, O, K, onde l'angolo OKR uguaglierebbe l'angolo OGR, ed eſſendo ancora gli angoli LMG, LRG retti, ſaranno ſimilmente eguali gli angoli MLR, NGR, ovvero l'alterno BAG, dunque i due angoli K, L egualiando gli due G, A, eſſi triangoli ſono ſimili.

Tav III. III. Si oſſervi, che le ſteſſe potenze F, E, P ſo-
Fig.40. no come i ſeni degli angoli oppoſti alle loro direzioni, eſſendo come i lati GC, AC, AG, i quali ſono proporzionali a' ſeni degli angoli oppoſti, ſecondo un notiſſimo Teorema della trigonometria.

CAP.

CAPITOLO V.

Delle Macchine, che facilitano il Moto.

PROPOSIZIONE XV.

Tav:IV.

Sia un vette ACB *mobile intorno al punto fiſſo,* Fig.43. 44
o ſoſtegno C, *e le forze* G, P, *applicate a punti* A, B, *lo tirino per le direzioni* AF, BH, *comunque inclinate alle braccia di detto vette, e ſtiano in equilibrio: ſe dal ſoſtegno ſi tireranno le perpendicolari* CF, CD *ſopra le dette direzioni, ſarà la forza G, alla forza P reciprocamente, come la perpendicolare* CD, *all' altra* CF.

COncorrino le direzioni *AF*, *BH* nel punto *E* Fig.44.
(quando non ſieno parallele, nel qual caſo converrebbero in un punto *E* infinitamente lontano, ed allora, o ſarebbero le dette perpendicolari, le medeſime *CA*, *CB*, o gli ſarebbero proporzionali per la ſimilitudine de' triangoli *ACF*, *BCD*; onde eſſendo *G* a *P*, come reciprocamente *BC* a *CA*, ſarebbero le dette forze reciproche alle medeſime perpendicolari) e ſi congiunga Fig 43.
la retta *CE*, queſta ſarà neceſſariamente la direzione della forza, che fa il ſoſtegno nel reggere la preſſione cagionatale dalle forze *G*, *P*; Imperciocchè tirate le rette *CH*, *CK*, parallele alle direzioni *AF*, *DB*, il parallelogrammo *CHEK*, dimoſtrerà le direzioni *AF*, *BD*, e la proporzione delle forze *P*, *G*, ne' lati *EH*, *EK*, e però il diametro *CE*, dimoſtra la direzione, e la forza del ſoſtegno *C*, che ſi equilibra, con amendue le dette potenze, e perchè

i triangoli *CHE*, *CEK* ſono eguali, le loro baſi *HE*, *EK* ſono reciprocamente come le altezze *CF*, *CD*, dunque, eſſendo *P* a *G*, come *HE* ad *EK*, biſogna, che ſtia *G* a *P*, come reciprocamente la perpendicolare *CD* alla perpendicolare *CF*. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se la forza *P* ora tirerà perpendicolarmente per la direzione *RB*, ed ora obliquamente per la direzione *BL*, il ſuo momento nel primo caſo, all'altro nel ſecondo, ſarà come il braccio *CB* alla perpendicolare *CD* tirata ſopra l'altra *BL*. Imperciocchè ſi equilibri la forza *P* nel primo caſo colla forza *G*, e nel ſecondo colla forza *N*, ſarà *P* a *G*, come *AC* a *CB*, e nell'altro caſo, ſarà *N* a *P*, come *CD* a *CA*, dunque ſarà *G* ad *N*, come *CB* a *CD*, ed è la ragione di *G* ad *N* la medeſima, che de' loro momenti, e però ancora de' momenti a loro eguali, cioè di *P*, quando tira per la direzione *BR*, e del medeſimo *P* tirante per la direzione *BL*, dunque queſti momenti ſono come *CB* alla perpendicolare *CD*. Fig. 45.

II. Se il vette *AB* è ſoſtenuto orizzontalmente in ambi gli eſtremi *A*, *B*, ed al punto *C* ſia applicato il peſo *D*, la forza che eſercita il ſoſtegno *A* a quella, che eſercita il ſoſtegno *B*, ſta reciprocamente, come la diſtanza *CB* alla diſtanza *CA*. Fig. 46.

III. Ma ſe il detto vette è ſoſtenuto con qualche inclinazione all'orizzonte, come quando con eſſo ſi portaſſe ſopra una ſcala, o ſopra la ſalita di un monte il peſo *D* attaccato al punto *C*, ſuppo- Fig. 47.

poſto, che la potenza *A*, alla potenza *B*, ed al peſo *D*, foſſe, come le linee *AF*, *FB*, *AB*, fatto un triangolo *AFB*, e circoſcrittogli un cerchio, il quale ſia ſegato dalla direzione *FC* di eſſo peſo nel punto *H*, congiunte *AH*, *BH*, doveranno le dette forze ſoſtenere gli eſtremi del vette ſecondo le direzioni *AH*, *BH*; imperocchè compiuto il parallelogrammo *ICGH*, ſarà l' angolo *CHI* eguale all' angolo *BAF*, e l' angolo *ICH* eguale all' alterno *GHC*, eguaglierà l' altro *ABF*, per eſſere nel medeſimo ſegmento, e però il triangolo *HIC*, ſarà ſimile al triangolo *BAF*. Onde ſiccome i lati *BF*, *FA*, e la baſe *AB* eguaglieranno le forze da applicarſi in *B*, ed in *A*, ed il peſo *D*, così ancora i lati *CI*, *IH*, cioè *GH*, *HI*, ſono proporzionali alle dette forze, ed il diametro *HC*, al peſo da ſoſtenerſi; onde con tali direzioni dovrà portarſi eſſo peſo per mezzo del vette *AB* inclinato all' orizzonte.

PROPOSIZIONE XVI.

Come ſi poſſa ſoſtenere un gran pezzo da più perſone con più d' un vette.

PEr eſempio dovendoſi portare da tre perſone *A*, *E*, *C*, il peſo *D* con due vetti, pigliato il vette *EC* retto dalle forze *E*, *C* di due perſone ſuppoſte eguali, e dividendolo per mezzo in *F*, vi ſi appoggi l' eſtremo di un' altro vette *AF* da raccomandarſi alla forza di una terza perſona eguale nel termine *A*, e dividaſi *AF* in *B*, ſicchè *AB* ſia doppia di *BF*, aggiunto il peſo *D* in *B*, ſarà retto dalle tre forze *E*, *C*, *A*, perchè come *AB* a *BF*, Fig. 48.

BF, così la parte del peſo *D*, retta in *F*, alla parte ſoſtenuta in *A*; dunque in *F* premono due terzi del peſo, ſoſtenuti dalle due perſone *E*, *C*, ed un terzo ſolo è ſoſtenuto in *A* dalla terza perſona; onde tutte tre egualmente ſono caricate per ſoſtenere eſſo peſo. Se poi foſſero quattro perſone, che doveſſero ſoſtenere il peſo *D*, eguale alle lor quattro forze, ſi potrà con tre vetti *AH*, *EC*, *GF*, ſoſtenere il peſo *D*, applicato nel punto *B* di mezzo al terzo vette *GF*, appoggiato nel mezzo di ambidue gli altri vetti, ſoſtenuti ne' loro termini dalle forze *A*, *H*, *E*, *C*. Similmente un peſo eguale a cinque forze, ſi può ſoſtenere con quattro vetti *AI*, *KH*, *EG*, *CF*, dividendo queſt' ultimo *FC* in *B*, dove attaccare ſi deve il peſo in maniera, che *CB* a *BF*, ſia come quattro a uno, eſſendo poſte le quattro forze ne' termini *A*, *I*, *H*, *K* de' primi due vetti, ed appoggiandoſi al mezzo *F* del terzo *EG*, il quarto *FC*, retto in *C* dalla quinta potenza, e così con altri vetti poſſono più perſone ſoſtenere un peſo più grave.

Fig. 49.

Fig. 50.

PROPOSIZIONE XVII.

Spiegare varj uſuali ſtrumenti, che fanno la loro forza per mezzo di uno, o più vetti.

Tav. V. Fig. 51.

I. PRimieramente ſe il Martello *ABC*, ſi applica colla ſua parte biſorcata a ſpiccare il chiodo *C* da una tavola, fiſſandolo verſo il punto *B*, ſi fa un vette infleſſo *ABC*, in cui la potenza ſi applica in *A*, il ſoſtegno, o centro del moto in *B*, e la reſiſtenza da vincere è in *C*; onde, quanto più lungo ſarà il manico *AB*, della diſtanza *BC*, tanto

to meglio riuſcirà l' effetto di ſvellere il detto chiodo *C*.

II. Secondariamente le Forbici, o Ciſoie *GHIF* per dividere il corpo *E*, fanno la forza come di due vetti connetti nel comune ſoſtegno al nodo *D*, eſſendo applicata la potenza a' termini *F*, *G* d' ambi i vetti *FI*, *GH* per vincere la reſiſtenza *E*; onde quanto maggiore è la diſtanza *FD*, ovvero *GD* della diſtanza *DE*, tanto più agevolmente ſegue la diviſione, onde giova, che il corpo da dividerſi ſia più vicino al nodo *D*. Fig. 52.

III. Le tanaglie per ſtringere, o tener fermo il corpo *L*, o rimuoverlo dal ſuo ſito, mettono in opera ſimilmente il doppio vette *EMN*, *DMB* mobile intorno al nodo *M*, come delle forbici ſi è detto; ma quando ſi adattano a ſvellere un chiodo, e ſi ferma il conveſſo inferiore in qualche parte ſtabile *N*, riſulta un vette intieſſo *ENL*, il cui ſoſtegno *N* più s' avvicina alla materia da muoverſi *L*, che non era all' uſo primiero al nodo *M*, e così più facilmente ne ſegue l' effetto. Fig. 53. Fig. 54.

IV. Nelle Cicogne, (così chiamate da Ariſtotile quelle macchine, che ſono gli Altalevi adattati ad uſo di cavar l' acqua da alcuni pozzi di campagna) ſul termine più alto *P* di un forte palo *PS*, piantato verticalmente accanto al pozzo *M*, ſta imperniato un altro palo traverſo *QBO*, il quale è un vette aggravato nella parte *Q* dal peſo attaccatovi, e dall' altra banda *O* vi è anneſſa la fune o ſtanga *OR*, cui è attaccato il ſecchio per attingere l' acqua dal pozzo, e quantunque il peſo *Q* ſia di qualche incomodo alla potenza, che applicata in *R*, cerca di abbaſſare il ſecchio per tuf- Fig. 55.

farlo nell' acque, non è però di grande impedimento, atteſa la maggior lunghezza del braccio *BO* a cui ſi applica la potenza in relazione del braccio *BQ*, da cui pende il peſo: ma al contrario ne riceve detta potenza, non piccolo ſollievo, quando alza il ſecchio eſſendo ajutata ad alzarlo dal medeſimo peſo *Q*, il quale ha il momento di ſcendere.

Fig. 56. V. Nelle trombe da alzar l' acqua, ſi alza lo ſtantufo *S* per mezzo del vette inflеſſo *XVT*, appoggiato in *Z*, ovvero del ſolo *XZT* mobile intorno al ſoſtegno *Z*, onde quanto ſarà il punto *X*, dove ſi applica la potenza, più lontano dal ſoſtegno, ovvero quanto ſarà maggiore *XZ* del braccio *ZT*, da cui pende lo ſtantufo, tanto più agevolmente ſi farà l' agitazione dello ſtrumento, e l' attrazione dell' acqua.

Fig. 57. VI. Volendo alzare il gran ſaſſo *CDE* colla manuella *AC*, mobile ſull' appoggio *B*, v' interviene l' azione di due vetti: uno è la ſuddetta manuella, l' altro è la lunghezza del ſaſſo dall' eſtremo *C*, ove appoggia ſopra la prima leva, ſino all' eſtremo *E*, dove ſta ſul terreno, e tirando dal centro di gravità *D*, del ſaſſo la perpendicolare *DF* all' orizzonte, ſarà il peſo del ſaſſo alla forza poſta in *A*, in ragione compoſta di *AB* a *BC*, e di *CE* ad *EF*; imperochè facendo come *AB* a *BC*, così *FE*, ad *H*; ſi oſſervi, che nel vette *CE*, la forza del peſo *D*, ſta a quella, che lo ſolleva in *C*, come *CE* ad *EF*, ma la forza, che ſolleva eſſo peſo in *C* ſta alla potenza poſta in *A* come *AB* a *BC*, cioè come *EF* ad *H*, dunque per l' ugualità ordinata, il peſo ſta alla potenza poſta in *A*, come *CE* ad *H*,

la

la qual ragione è composta di *CE* ad *EF*, e di *EF* ad *H*; l' ultima delle quali è la medesima, che di *AB* a *BC*.

PROPOSIZIONE XVIII.

Spiegare la forza dell' asse nella ruota.

CHiamasi asse nella ruota il cilindro *AB* annesso ad una ruota, o timpano *EDF* di maggiore diametro, o ad altro equivalente ordigno, cui applicandosi la potenza muove il peso *C*, mediante la fune, che si ravvolge al detto cilindro. E' manifesto, che nello stesso tempo in cui il peso è tirato per tanto spazio, quanto importa la lunghezza della fune, che circonda una volta il cilindro, bisogna, che la potenza muova tutta la ruota, o girando con essa finchè ritorni al suo posto, ovvero stando fissa essa forza finchè passi per le sue mani tutto il contorno della ruota, sicchè la velocità della potenza, sarà a quella del peso, come la circonferenza della ruota, alla circoferenza della grossezza del cilindro, la qual ragione è la medesima, che quella del raggio della ruota, al semidiametro del cilindro, onde stando la potenza al peso reciprocamente come il semidiametro del cilindro, al raggio della ruota si farà l' equilibrio sostentando il peso *C*, e qualunque piccolo vantaggio acquistando essa forza in se stessa, o ponendosi in distanza alquanto maggiore dal centro della ruota, per esempio applicandosi alle caviglie *FV*, *SE*, fisse nel giro di essa ruota, potrà comodamente smuovere il detto peso, derivando una periferia alquanto maggiore, Fig. 58.

Ma

Ma per meglio concepire l' azione di queſto
Fig. 59. ſtrumento, ſi rappreſenti la ruota col cerchio *BEF*, ed il cilindro col cerchio concentrico *DHK*, e tirati per lo centro comune *O* i ſemidiametri *HOE*, *BOD*, ſi farà manifeſto eſſere queſti alcuni vetti, il cui ſoſtegno *O*, ed il peſo da muoverſi attaccato all' eſtremo *H* del primo vette, applicandoſi la potenza *P* all' eſtremo *E*, ovvero nel ſecondo vette applicandoſi il peſo in *D*, e la potenza all' altro termine *B*, dal che agevolmente ſi concepiſce, eſſere queſto ſtrumento un vette perpetuo, che ſempre va rinnovandoſi nella continuazione del moto, oppure eſſere un aggregato d' infiniti vetti, de' quali abbaſſandoſi l' uno, ſuccede ſempre nel ſuo luogo un' altro a fare il medeſimo ufizio, fino a tanto che la potenza dura a muovere queſto ſtrumento.

Si avverta però: primieramente che in queſto moto non ſi ſoprapponga la fune ſopra le ſpire di eſſa fune, applicate al cilindro nell' anteriore rivoluzione, perchè creſcerebbe la groſſezza di eſſo cilindro; onde la potenza proverebbe minor momento, movendo il cilindro più ingroſſato, avendo minor proporzione il raggio della ruota al ſemidiametro del cilindro ingroſſato di quella, che aveva al cilindro nudo.

Secondariamente ſi avverta, che la direzione della potenza *P*, ſia la retta *EP*, ovvero *BN* tangente di eſſa ruota, perchè così la ſua diſtanza del centro del moto *O* ſarà l' intiero raggio *OB*, ma ſe tiraſſe eſſa ruota per un altra direzione *BG* inclinata al raggio la ſua diſtanza ſarebbe ſolamente la perpendicolre *OM* tirata dal centro ſopra di eſſa direzione.

L' Ar-

L' Argano è un cilindro perpendicolare all'orizzonte, il quale ſi muove per alcune ſtanghe *FD*, *GE* Tav. VI. in eſſo fiſſe, e con ciò ſi fa muovere il peſo *C* per Fig. 60. una fune, che ſi ravvolge intorno ad eſſo cilindro, e però la potenza al peſo ſarebbe nell' equilibrio, quando ſteſſe come il ſemidiametro del cilindro alla lunghezza di queſte ſtanghe, cui ſi applica la potenza, e con alquanto vantaggio di tal lunghezza di ſtanghe, può la potenza muovere detto peſo. Se Fig. 61. poi eſſo cilindro *AB* è poſto orizzontalmente, ed in eſſo in vece d'alcuna ruota vi ſiano fiſſe le caviglie *DE*, *FG*, queſto chiamaſi Bulghero, con cui ſi alzano i peſi per le fabbriche, o ſi attigne l' acqua da' pozzi, alzando la ſecchia *C*.

La Macchina, che ſerve a varare i Navicelli Fig. 62. dal foſſo di Livorno in Arno, e vicendevolmente da queſto in quello, come ſi vede fuori della Porta a Mare di Piſa, da' Latini detta *Geranium*, è una gran ruota, dentro di cui gli uomini ſteſſi camminano calcando in *D*, ed *F*, i gradini interiori come ſe tentaſſero di ſalire per quella concava circonferenza, il che fa girare il cilindro *AB*, a cui avvolta la fune applicata al Navicello *C* viene con ciò queſto rialzato, e traſportato da un alveo, all' altro, Però la diſtanza di queſte forze moventi dal centro del moto non è l' intero raggio della ruota, ma ſolamente la perpendicolare, che dal centro di eſſa, può tirarſi ſopra la direzione del moto, che fanno gli uomini nel ſalire; vi è però un altro vantaggio dal piano inclinato, per cui ſi tira detto Navicello, il qual piano diminuiſce il momento di eſso peſo come vedraſſi al ſuo luogo.

All' Aſſe nella ruota ſi poſſono riferire ancora Fig. 63. quei

quei cilindri *AB*, che ſi fanno girare con uno, o con due manichi ripiegati ad angolo retto, quali ſono *ECB*, *AFG*, a' quali applicandoſi la potenza deſcrive un gran giro, mentre il peſo *D*, ovvero *O* attaccato alla fune rivolta al cilindro, deſcrive ſalendo, o diſcendendo ſolamente tanto ſpazio quanto importa la fune, che ſi avvolge ad eſso cilindro.

Fig.64. Il Succhiello *DCE* ſimilmente ſi riferiſce a queſto genere di macchina, perchè la potenza applicata al manico *DE*, deſcrive un gran cerchio nel mentre, che la punta *C* deſcrive un piccolo forame, inſinuandoſi a vincere la reſiſtenza delle parti del legno, che ſi devono ſeparare, e quanto il diametro *DE* del cerchio deſcritto dalla potenza, è maggiore della groſſezza della punta *C*, tanto viceverſa maggiore può eſsere la reſiſtenza della forza, con cui contraſta. In queſto ſtrumento però vi è ancora un altro vantaggio per la forza della vite in cui è conteſta la punta *C*, e ancora, perchè partecipa del Cuneo coll' acutezza del filo, che ſuol avere la punta quando è bene aguzza. Il che quanto renda agevole l' effetto ſi di moſtrerà a ſuo luogo.

PROPOSIZIONE XIX.

Spiegare la compoſizione di piu aſſi, e ruote combinate nella medeſima macchina.

Tav.VII. Fig.65. TAlvolta per muovere un peſo, non ſerve un ſolo aſſe colla ſua ruota, ma biſogna unirne inſieme molti conneſſi per mezzo di varj rocchetti, o ruote dentate, che danno la dovuta direzione,

ne, ed il moto opportuno a qualunque di essi secondo i bisogni Sia per ragione d' esempio la seguente macchina *CDFH* composta di quattro assi colle sue rote dentate, in cui se il manico *AB*, suppongasi dieci volte maggiore del semidiametro della rotella *C*, sarà la potenza in *A* applicata, dieci volte più veloce di qualsivoglia dente di essa rotella. Sia poi la ruota grande *D* in un altro asse, che abbia dieci volte più denti della rotella *C*, avendo il semidiametro dieci volte maggiore; dunque bisogna, che la rotella *C* giri dieci volte, urtando con i suoi denti in quegli della ruota *D*, prima che questa faccia un intiera rivoluzione, nel qual tempo gira ancora una rotella *E* fissa nel medesimo asse con *D*; onde la rotella *C* sarà dieci volte più veloce di questa rotella *E*, a cui applicandosi un' altra gran ruota *F* maggiore di giro di essa rotella *E* si proverà, che detta rotella *E* averà un moto dieci volte più veloce d'una simile rotella *G*, fissa nel medesimo asse colla ruota *F*, e similmente urtando la ruota *G* in un' altra maggior ruota *H*, che abbia dieci volte più denti di essa, dovrà fare dieci rivoluzioni, prima che la ruota *H* giri una volta col suo asse, in cui posto un cannello *K* grosso quanto la rotella *G* intorno a cui giri la fune, per cui si sollevi il peso *L*, sarà pure il moto della ruota *G* dieci volte più veloce del moto con cui si solleva il peso *L*. Perchè dunque la potenza *A* è dieci volte più veloce della rotella *C*, sarà la velocità di *A* a quella di *C* come 10000. a 1000. e questa velocità *C* essendo dieci volte maggiore della velocità della rotella *E*, starà quella a questa come 1000. a 100. similmente per essere la velo-

locità di *E* decupla di quella rotella *G*, ſtarà ad eſſa come 100. a 10. e finalmente la velocità di *G* ſtarà alla velocità della fune *K*, o del peſo *L* come 10. ad 1. dunque per l' egualità ordinata, la velocità della potenza in *A* a quella del peſo *L* ſarà come 10000. ad 1. onde con queſto ſtrumento quella potenza, che da ſe potrebbe elevare una ſola libbra, ne leverebbe 10000. e ſe vi foſsero altri aſſi di più diſpoſti colla medeſima proporzione, potrebbe alzare tante libbre di peſo, quanto indicherebbe la medeſima unità con aggiunti tanti zeri appreſso, quanti fuſsero detti aſſi, perchè decuplandoſi la velocità con qualunque aſse, biſognerebbe aggiungere di mano in mano all' unità tanti zeri, quanti fuſsero i detti aſſi, moltiplicandoſi dieci volte maggiormente qualunque numero coll' aggiunta di un zero; onde ſi fa conto, che con ſoli 50. aſſi, la forza di una formica per ſe abile a portare un grano di arena, potrebbe muovere tutto l'univerſo Mondo, quando fin alle ſtelle ripieno fuſse d'arena; imperciocchè ſi moſtra da Archimede, che il numero non è maggiore di quello, che eſprimerebbe una ſola unità con appreſso cinquanta zeri, e però ſi gloriava Archimede, che ſe aveſse potuto mettere un piede fuori del Mondo, l' avrebbe trasferito da un luogo a un altro.

„*Dic ubi conſiſtam, & cælum terramque movebo.*

Si può oſservare un ſimile eſempio, nella macchina, che ſi uſa a far elevare continuamente l'acqua del pozzo *K* per via d'una catena di caſsette *M*, le quali verſano l' acqua per la caſsa *HI*, nella vaſca *L*, adattandoſi un cavallo, o un uomo a girare la ſtanga orizzontale *AB*, con che ſi rivol-

Fig. 66.

ta

ta il rocchetto *C*, e queſto urtando ne' denti della ruota *D*, fa girare il rocchetto *E*, da cui è moſſa un' altra ruota *F* col cannoncello, o rocchetto *G* intorno a cui ſono applicate le caſseette d' acqua *M*. Se ſarà la lunghezza *A B* braccia cinque, ed il ſemidiametro del rocchetto *C* d' un mezzo braccio, e però la potenza *B* dieci volte più veloce di tal rocchetto *C*, il quale debba girare quattro volte prima di urtare in tutti i denti della ruota *D*, che fa girare il rocchetto *E* eguale a *C*, e queſto rocchetto *E* debba girare tre volte prima, che muova tutta la ruota *F* col cannoncello, o rocchetto *G*, ſarà la velocità di *B* alla velocità dell' acqua ſollevata intorno al cannoncello, o rocchetto *G* in ragione compoſta di 10. ad 1. di 4. ad 1. e di 3. ad 1. il che importa una ragione di 120. ad 1. perchè 10. via 4. fa 40. e 40. via 3. fa 120.

Talvolta non abbiamo biſogno di gran forze per muovere un peſo, ma fa di meſtieri di movere un mobile con gran velocità, come accade nelle macchine de' mulini girate dall' acqua, o dal vento: per eſempio la ruota *I*, già equilibrata ſopra i ſuoi perni, e ſoſtenuta baſtevolmente dalla robuſtezza di eſſi, per macinare il grano, deve moverſi in giro, ſopra al ſuo aſſe con gran velocità, onde vi ſi adatta una macchina, con cui il vento urtando in ruote grandi, ne fa muovere altre più piccole, di manierachè ſi comunica maggior velocità al peſo da muoverſi, che alla potenza: ſia il mulino a vento *A B H*, e l' ale *C* girando per la forza del vento fanno girare l' aſſe *A B*, colla ruota *E*, la quale con i ſuoi denti, piglia il roccchetto *F*, e fa girare l' aſse *F G* colla ruota *G*, che urtando nell' Tavola VIII. Fig. 67.

altro

altro rocchetto *H* fa girare la ruota *I*, ed è la velocità del vento in *C*, alla velocità de' denti della ruota *E*, come il ſemidiametro *CD* al raggio della ruota, che ſia per eſempio in ragion tripla, perchè poi nel girare una volta la ruota *E*, fa girare più volte il rocchetto *F*, ſecondo la proporzione, che ha il numero de' denti in *E*, al numero delle ſcannellature del rocchetto *F*, (e ſia per eſempio quadrupla) ed altrettante volte, gira la ruota *G*, che ſi ſuppone eguale ad *E*, ſarà la velocità della ruota *E* a quella della ruota *G*, in proporzione di 1. a 4. ma in qualunque rivoluzione della ruota *G*, doverà più volte girare il roccherto *H* (e ſia per eſempio cinque volte) e con eſso la macina *I*, ſarà la velocità *G*, a quella della macina *I*, come 1. a 5. onde la velocità del vento a quella della macina, è compoſta delle ragioni di 3. 1. di 1. 4. e di 1. 5. cioè in tutto ſarà come 3. a 20. e reciprocamente la forza del vento, preſa aſsolutamente, ſta alla reſiſtenza, che ha in tal ſito la macina a muoverſi, come 20. 3.

Fig.68. Ancora negli ordigni, che adoprano le donne per filar lana, o bambagie, e nella ruota adoprata da' funari per far le corde, o nelle mole adattate ad aguzzare i coltelli, ed in quelle, che ſervono a lavorare, o pulir le gemme, per lo più la potenza ſi adatta in maniera, che poſſa muovere, non già qualche gran peſo, ma quel ſoggetto leggieriſſimo della lana, cotone &c. poſto nel centro della rotella *H* in *I* con grandiſſima velocità, perchè le loro minime fibre attorrigliandoſi inſieme, ſi premono vicendevolmente con gran momento; e perciò ſi compone inſieme la ruota *AE* colla minore *H*, amendue circon-

condate da una fune, che ricorre in ſe ſteſſa, perchè in una ſola rivoluzione della maggiore, gira la minore tante volte, quante il diametro della minore, entra nella maggiore. E nella ſteſſa maniera ſe la rotella *H* è una mola, nel girare velocemente, preme con gran forza il coltello, o la gemma calcatavi ſopra, rendendo quello, o più acuto nel ſuo filo, e queſta più ſpianata, o pulita nelle ſue faccette, come facilmente s'intende applicandovi le già dette dottrine, ſenza che facci meſtieri di più allungarmi ſopra di ciò.

PROPOSIZIONE XX.

Spiegare la forza delle Taglie, o Carrucole in qualſivoglia modo diſpoſte.

I. PRimieramente eſſendo fiſſa una carrucola *B*, per cui paſſando la fune venga alzato un peſo *A* dalla potenza *P*, niun vantaggio di forza per ciò acquiſta la potenza, ma ſolo con eſſa carrucola ha maggior facilità, perchè ſe la mano *P* doveſſe immediatamente alzare il peſo *A*, lo inalzerebbe col peſo delle proprie braccia, laddove mediante la carrucola *B* ſi muove la mano all'ingiù, onde viene ajutata dal peſo delle ſue braccia nell'alzare il medeſimo peſo *A* più comodamente, ma però con una forza eguale a detto peſo, eſſendo il centro della carrucola *B* in diſtanza eguale dall'uno, e l'altro braccio della corda, e però il centro del moto non è in diverſa lontananza dalla direzione del peſo, e da quella della potenza. Fig.69.

II. In ſecondo luogo, ſe ſi adopererà una taglia mobile, verrà a raddoppiarſi la forza della potenza; Fig.70.

onde potrà ſollevare un peſo doppio di ſe medeſima; imperciocchè ſtando la Taglia *B* mobile attaccata al peſo *A*, e retta la fune in *F*, vicino all' immobile taglia *C*, ſe la potenza, ſi applichi in *C*, a ſollevare la fune, o ſi applichi in *H*, a tirarla in giù mediante la taglia fiſſa in *C*, ſempre è manifeſto, che volendo aſcenda il peſo *A* per l' altezza, che è da *D* in *E*, biſogna che ambidue i tratti *DE*, *GI* paſſino per mano della potenza, ovvero, che ſtando eſſa attaccata al medeſimo punto della fune, ſi muova per un tratto eguale ad amendue le lunghezze *ED*, *GI*, e però la velocità della potenza eſſendo dupla di quella del peſo *A*, potrà vicendevolmente eſſo peſo eſſere duplo della potenza *P*, il che ancora ſi può ricavare, oſſervando, che la taglia mobile *B* è come un vette *ID*, il cui ſoſtegno è nell' eſtremo *D*, ed il peſo dipende dal mezzo *B*, e la potenza inalza l' altro eſtremo *I*, e però ſta al peſo reciprocamente come *ID* a *BI*; che è ragione ſoddupla.

Fig. 71. III. Se ancora l' eſtremo della fune *F* foſſe raccomandato alla medeſima Taglia mobile, per cui di nuovo paſſa la ſteſſa fune, ſi triplicherà la forza della potenza, perchè aſcendendo il peſo da *F* in *I* conviene, che la forza ſi muova triplicatamente, accio reſtino ſviluppati dalle Taglie i tre tratti di corda *FI*, *EH* *GK*, onde la velocità della potenza è tripla di quella del peſo, e però può reggere un peſo triplo di ſe.

Tav. IX Fig. 72 IV. Similmente eſſendo applicata la fune col termine *F* alla taglia fiſſa *C*, indi paſſando per la taglia mobile *B*, e circondando la taglia fiſſa *C*, indi paſſando per un altra taglia mobile *D*, e poi avan-

avanzandoſi all' altra immobile *E* potrà con eſſe la potenza *P* ſollevare un peſo quadruplo della ſua forza; perchè dovendo alzarſi il peſo *A* per uno ſpazio eguale a *IF*, converrà, che la potenza *P* tiri a ſe gli quattro tratti di corda eguali *FI*, *KL*, *MN*, *OQ*, onde avendo quadrupla velocità di quella del peſo, può ſollevare un peſo quadruplo della ſua forza.

V. Nella ſteſſa maniera ſi prova, che eſſendo il termine della fune applicato in *G*, ad una delle taglie mobili *D*, e paſſando per la fiſſa *C*, indi circondando la mobile *D*, poi paſſando per l' immobile *E*, indi per l' altra mobile *B*, ed attraverſando la terza immobile *F*, potrà la potenza *P*, alzare un peſo quintuplo di ſe ſteſſa, perchè avrà una velocità cinque volte maggiore di quella del peſo: eſſendo che ſollevandoſi queſto da *G* in *N*, conviene, che paſſino per le mani della potenza quei cinque tratti di fune *GN*, *MH*, *IO*, *RK*, *LQ*. E con tale artifizio moltiplicando le taglie, ſi potrà muovere qualunque peſo maggiore della potenza in ragione di qualunque numero pari paragonato all' unità, ſe il termine della fune è fiſſo in un ſito immobile ed in ragione di qualunque numero diſpari all' unità, ſe è attaccata la fune ad una Taglia mobile. Fig. 73.

VI. Queſta moltiplicità di carrucole può eſſere congiunta per un medeſimo aſſe, quando ſiano ruote eguali; ma eſſendo conficcate in una caſſa con diverſi aſſi, dovrebbero eſſere di diametro diſuguale, acciò i tratti della fune non venghino ad implicarſi uno con l' altro, e ſtiano però paralleli come è neceſſario nella ragione addotta del momento delle potenze con quello del peſo. Fig. 74.

VII. Essendo le funi con altrettanti corpi distinti,
Fig.75. quante sono le Taglie mobili B, D, I, raccomandate a' punti fissi H, E, G, crescerà il momento della potenza F, in ragione tanto multiplicata della dupla, quanto è il numero di esse Taglie, come quì essendo tre taglie, sarà il suo momento divenuto ottuplo, che è ragione triplicata della dupla, perchè se fosse applicata in D, averebbe a muovere il peso A con dupla velocità, e duplo momento; essendo in I, sarebbe la sua velocità di nuovo dupla, di quella, che averebbe in D, cioè quadrupla della velocità del peso A, ed essendo in F, l'ha dupla altresì di quella, che averebbe in I, è però ottupla di quella del peso, e così di mano in mano,

Fig.76. VIII. Se le funi, che abbracciano qualche Taglia non sono sensibilmente parallele, come finora si è supposto, ma prolungate le rette CE, PD convenissero ad un angolo in L, dovrebbe la direzione del peso A passare pel medesimo angolo L, come si è dimostrato di sopra, e da qualunque punto B della direzione del peso A, tirando le parallele BE, DB ad esse funi, sarà la potenza P, al peso A, come LD ad LB, cioè come il seno dell' angolo DBL, che è la metà di EBD, o dell' opposto DLE, fatto dal concorso delle funi, al seno dell' angolo BDL, o del suo complemento BDP.

Fig.77. IX. E se più taglie mobili B, C, D applicate a diverse funi fisse in G, F, E faranno alzare il peso A, dalla potenza P, sarà sempre la potenza al peso, in ragione composta di quella de' seni della metà di ciascun angolo SVT compreso dalle funi prolungate, a' seni de' medesimi angoli interi, come apparisce dal detto di sopra. X. Si

X. Si ſuol comporre ancora queſto ſtrumento coll' argano, o con più aſſi combinati inſieme, come appare in queſta diſpoſizione, ed è facile il calcolare la forza, componendo inſieme le ragioni, che riſultano da ciaſcun particolare ſtrumento, ſecondo le ragioni date di ſopra. Fig. 78.

PROPOSIZIONE XXI.

Eſporre la forza della vite.

NEl piano fiſſo *DE* ſieno ſcavate alcune ſpire, che ſi chiamano madrevite, e dentro di eſſe ſia inſerita la vite maſchia *BG*, al termine di cui ſia attaccato il peſo *A*, ed una potenza applicata al termine *C* del manico *BC*, girando eſſo raggio *BC* farà una circonferenza circolare, e dal piano *DE* ſi vedrà ſorgere una ſola voluta della vite, ed il peſo ſarà ſalito ſolamente tanto, quanto è l' intervallo da una ſpira, all' altra, dunque ſarà tanto più veloce il moto della potenza di quello del peſo, quanto maggiore è la Periferia del raggio *BC* della diſtanza, che corre tra un giro, e l' altro di eſſa vite; onde nella ſteſſa proporzione potrà la potenza muovere un peſo maggiore di quello, che ſolleverebbe da ſe ſteſſa ſenza altro ſtrumento: dal che è chiaro quanto immenſamente creſca il momento della potenza per mezzo della vite, e di quanta efficacia ſia queſta macchina da adoprarſi in molti riſcontri. Tav. X. Fig. 79.

Viceverſa, può talora eſſere il peſo da ſollevarſi applicato al piano *DE*, il quale ſi farà innalzare ſimilmente per mezzo della vite, ed in tal maniera ſottopoſte molte viti ſi può innalzare un gran Fig. 80.

peſo, anzi ſollevare un edifizio già fatto; come Geremia Lerſoni fece alzare il Campanile dalla Chieſa di S. Lorenzo di Rotterdam molti palmi ſopra terra, affinchè ſotto vi ſi rifaceſſi poi i fondamenti, ſopra de' quali fu poſato diritto, e ſano.

Ma il più comune, ed ordinario uſo delle viti è per ſtringere, o premere, o calcare qualche Fig.81. coſa, come nelle morſe de' Fabbri, ne' torchi degli Stampatori, e de' Librai, e ne' torchi con cui ſi fa ſcolare il vino dalle grappe già prima calcate, e l' olio dall' olive ſi vede apparire, e allora la reſiſtenza di ciò, che ſi deve premere, fa l' ufizio del peſo, mentre la potenza applicata al manico, che fa girare la vite cerca di vincere tale reſiſtenza, accoſtando inſieme quanto ſia poſſibile le parti di ciò, che ſi deve ſtringere, e comprimerſi vicendevolmente.

Frequentemente ſi ſuol comporre queſto ſtru- Fig.82. mento coll' aſſe nella ruota, ed allora ſi nomina, la Coclea infinita, o Vite perpetua d' Archimede. la di cui forza s' intende agevolmente, paragonando il moto della potenza applicata al manico *IL* della coclea *FG*, col moto del peſo pendente dal cilindro *ED* moſſo colla rotazione della ruota *B* in eſſo inſerita, la quale ſi va movendo ſecondo che i denti di eſſa ſono rivoltati dalle ſpire di detta vite. Nel tempo, che la potenza fa uno de' ſuoi giri col raggio *IL*, la coclea *FG* rivoltandoſi prende un ſol dente della ruota *B*, onde avanti che tutta la ruota abbia una volta girato, e che il peſo *A* ſia alzato tanto ſpazio quanta è la fune che abbraccia la groſſezza del cilindro *ED*, biſogna, che la potenza giri tante volte il manico *IL*, quanti ſo-

no

no i denti di essa ruota *B*, sicchè tanto più veloce sarà la potenza del peso, quanto è maggiore il raggio *IL*, moltiplicato per il numero dei denti della ruota *B*, del solo semidiametro del cilindro *ED* preso una volta, e però nella stessa ragione cresce il momento della potenza.

PROPOSIZIONE XXII.

Spiegare la forza del Cuneo.

CHiamasi Cuneo un prisma triangolare *FBG*, che col suo filo insinuandosi nel corpo *IH* ne separa le parti Si rappresenti la forza in cui dette parti resistono alla divisione per la retta *R* e sia la potenza *M* una mazza, o martello, da applicarsi al Cuneo, la quale stia ad *R*, come la metà della grossezza del Cuneo *AG*, sta alla sua altezza *AB*, dico, che la potenza *M* equivalerà alla detta resistenza, onde con ogni piccolo vantaggio, che abbia di velocità nel battere la faccia superiore del Cuneo, l' insinuerà frà le parti del corpo da spaccarsi, e vincerà la resistenza, che hanno le porzioni *IH* alla separazione; imperocchè movendosi il Cuneo contro il corpo *IH* secondo la direzione della sua altezza *AB* per qualunque minimo spazio *CB*, sarà necessario, che le dette parti *IH* cedano ciascuna, ritirandosi per lo spazio *CD*, o *CE*, dunque la velocità della potenza, che spinge il Cuneo, e l' accompagna, sta alla velocità, con cui si muove la resistenza come *BC* a *CD*, o come *AB* a *AG*, cioè per costruzione come la resistenza *R* alla potenza *M*, e però si equilibreranno, e col vantaggio poi di qual- Tav. XI. Fig. 83. 84.

che maggiore velocità, con cui ſi urti il Cuneo, percuotendo gagliardamente la faccia ſuperiore *FGQ* prevalerà la potenza alla reſiſtenza, onde il Cuneo ſi avanzerà dentro il corpo.

Quando poi vi è entrato, per cacciarlo più oltre ricercaſi minor forza, eſſendo quindi in poi la velocità della potenza a quella, con cui ſi ſeparano le parti *I*, *H*, come l' altezza *CB* alla perpendicolare *CT*, condotta ſul lato del Cuneo, o come *BA* ad *AP*, o come *BG* a *GA*, ed eſſendo *AP* minore di *AG*, è dunque maggior ragione quella di *BA* ad *AP*, dell' altra che era prima di *AB* ad *AG*. Imperocchè le parti *I*, *H* nello ſtaccarſi muovonſi come d' intorno al centro *B* per gli archi *ES*, *DO* perpendicolari a' raggi *BE*, *BD*, e poi eſſendo le perpendicolari *CT*, *CV*, parallele alle tangenti di eſſi archi, ſi deve miſurare lo ſpazio corſo dalle porzioni *I*, *H* colle direzioni *CT*, *CV*, e non più colle prime *CE*, *CD*. Fig.85.

Quindi con tal forza ſegue poi a ſpaccarſi il corpo *IH* con una feſſura, la quale ſcorre oltre la punta *B* del Cuneo, arrivando per eſempio fino in *L*, il che apporta un nuovo vantaggio, potendoſi allora conſiderare i due vetti infleſſi *ELN*, *DLN* congiunti nel medeſimo braccio *LN*, mentre alle braccia diſtinte *LE*, *LD* ſi applica ne' loro eſtremi *E*, *D* la forza mediante il Cuneo; onde più facilmente ſi promuove l' apertura, creſcendo le braccia *EL*, *DL* cui ſi applica col Cuneo la potenza, e ſcemando viceverſa il braccio *LN*, in cui rimane la reſiſtenza di eſſo vette infleſſo; onde molto maggiore ſi fa il momento della forza, e facilmente ſi ſtaccano affatto le dette parti *I*, *H*. Fig.86.

Quin-

Quindi ſi puo raccorre, che tanto più facile ſia la diviſione d' un corpo in parità d' altre circoſtanze, quanto più acuto è l' angolo del Cuneo, che vi ſi adopera, perchè eſsendo ſu la ſteſſa baſe *FG*, due Cunei *FBG* più acuto, ed *FRG* meno acuto, per eſſere l' angolo *FRG* maggiore dell' altro *FBG*, ſarà l' altezza *AB* maggiore di *AR*, onde la proporzione di *AB* ad *AG* ſarà maggiore, che di *AR* alla ſteſſa *AG*; ma come l' altezza del Cuneo alla metà della ſua baſe, così ſtà la reſiſtenza alla potenza nella prima introduzione del Cuneo, come s'è veduto di ſopra, dunque è maggiore la proporzione della reſiſtenza alla potenza col Cuneo più acuto, di quello ſia col Cuneo di minor acutezza; onde una potenza minore baſterà col Cuneo più acuto a far quello, che farebbe una maggior potenza col Cuneo men acuto; ed ancora tirate dal punto *A* le perpendicolari *AP*, *AS* ſopra i lati *BG*, *RG*, ſarà maggior la ragione di *BA* ad *AP*, che di *RA* ad *AS*, eſſendo la prima eguale alla ragione di *BG* a *GA*, la ſeconda eguale a quella di *RG* alla ſteſſa *GA*, eſſendo *RG* minore di *BG*; onde ancora nel proſeguimento, ha la reſiſtenza minor ragione alla potenza col Cuneo più acuto, il quale può eſſere adoperato da forza minore, e fare il medeſimo effetto. Fig. 87.

Si riducono al Cuneo tutti gli ſtrumenti, che ſi adoperano per fendere, e tagliare varie materie, cioè i coltelli, le ſcuri, le aſce, le piane, i raſoi, &c. e talvolta per farli più acuti ſi ſuole affilarli colla punta alquanto curva, come moſtra il profilo *FBG* compoſto di due curve *BG*, *BF* toccate dalla retta intermedia *BA*, loro tangente, il quale Fig. 88.

an-

angolo *FBG* è minore di qualſivoglia angolo acuto rettileneo (per la. 16. del 3. degli Elem.) e però la punta *FBG*, ovvero il filo del raſoio *BD*, è più atto ad inſinuarſi per radere il pelo, come biſogna, e così ancora le ugne di molti animali
Fig.89. ſi vedono dalla natura compoſte con varie curve *AB*, *FB*, *GB*, le quali rieſcono molto pronte a penetrare i corpi degli altri animali, che vogliono eſſi attrapare.

PROPOSIZIONE XXIII.

Spiegare la ragione de' piani inclinati.

Fig.90. SImile al cuneo è il piano inclinato *GB*, elevato dall' orizzonte *AB* per l' angolo *ABG*, e ſiccome cacciando il taglio *B* d' una bietta, o cuneo *GAB* ſotto il corpo *E*, poſato nel pavimento *BD*, accanto al muro *DH*, ſi farebbe facilmente aſcendere eſſo peſo *E* ſopra il piano *BG*, ſeparandolo dal pavimento, cui ſtava congiunto colla propria preſſione, e ciò più agevolmente ſi otterrebbe, quando foſſe l' angolo *ABG*, più acuto, così ſtando fermo il piano inclinato *GB* con maggiore facilità ſi farebbe ſalire ſopra di eſſo il medeſimo peſo *E*, ſecondo che il detto angolo *ABG* ſarà minore. Si cerca dunque, in qual proporzione creſca il momento della fotza, per muovere un dato peſo ſopra de' piani diverſamente inclinati.

Fig.91. Sia il grave *KM* rotondo, che ſtia per cadere ſecondo l' inclinato piano *AB*, ma ſia trattenuto da una forza *L*, che lo tiri per la direzione *KP* direttamente contraria alla *KF* con cui ſcenderebbe

be, cioè parallela al piano *AB*: congiunta al contatto dal centro del corpo la retta *KM*, e condotta *KD* perpendicolare all' orizzonte, che è la direzione per cui la gravità dovrebbe per ſe ſteſſa far diſcendere il corpo, ſi conduca *MR* parallela ad eſſa *KD*; onde riuſcirà il parallelogrammo *KRMQ*; dunque la forza *L*, la quale ritira il corpo per la direzione *KR* ſta alla gravità del peſo, che lo ſpinge per la direzione *KQ* come *RK* a *KQ*, ed alla preſſione del corpo ſopra il piano *AB*, ovvero alla reſiſtenza di queſto piano, che ſoſtiene eſſo corpo, ſaranno le potenze *L*, *K* a detta preſſione, come i lati *RK*, *KQ* al ſemidiametro *KM* ſtando in equilibrio queſte tre forze. Ed eſſendo *RK* eguale ad *MQ*, ed il triangolo *MKQ* ſimile al triangolo *QBD*, ed all' intero *ABC*, dunque la gravità aſſoluta del corpo *K* alla ſua gravità relativa, che eſerciterebbe nel piano per *KF*, che ſi eguaglia alla forza *L*, da cui è ritirata per la direzione contraria, ſtando come *KQ* a *QM*, ſtarà come *AB* ad *AC*, eſſendo queſti lati proporzionali a quelli; ed alla preſſione, che fa ſopra il piano, ovvero alla reſiſtenza di eſſo piano, che eguaglia detta preſſione, ſta la medeſima gravità aſſoluta come *AB* a *BC*, e però il momento di eſſo grave per il piano inclinato ſta al momento totale, con cui ſcenderebbe nel perpendicolo, come reciprocamente la perpendicolare *AC* alla lunghezza *AB* di eſſo piano inclinato, ed il momento con cui eſſo corpo *K* ſi aggrava ſopra il piano *AB*, al momento con cui eſſo corpo premerebbe un piano orizzontale; oppoſto alla ſua perpendicolare caduta, è come la detta baſe *BC* alla medeſima lunghezza del piano *AB*. Il che &c. Co-

COROLLARI.

Fig.92. I. Se il corpo *A* è collocato in varj piani *BE*, *BD*, che abbino la medeſima altezza *BI* il momento nel piano *BE* al momento nel piano *BD* ſarà reciprocamente come *BD* a *BE*, perchè il primo momento a quello, che avrebbe nel perpendicolo ſta come *BI* a *BE*, ed il momento nel perpendicolo, al momento nel ſecondo piano *BD*, ſta come *BD* a *BI*; dunque per l'egualità perturbata il momento nel primo piano *BE* a quello nel ſecondo piano *BD* ſtà come *BD* a *BE*.

Fig.94. II. Se in ambidue i piani *BE*, *BD* egualmente alti, ſi porranno due peſi *C* ed *A* proporzionali alle lunghezze di eſſi piani, averanno tutti due eguale momento in eſſi, di maniera che connettendoſi con una funicella *AFC*, che paſſa per la carrucola *F*, ſtaranno in equilibrio; imperocchè pongaſi un grave *H* eguale all'altro *A* nel piano *BE*, eſſendo *C*, ed *H* nel medeſimo piano, il momento di *C* a quello di *H*, ſta come *C* ad *H*, cioè come *C* ad *A*, oppure come *BE* a *BD*, ma ancora il momento di *A* nel piano *DB* a quello del peſo eguale *H* nel piano *BE*, ſta come *BE* a *BD*; dunque il momento di *C* nel piano *BE*, eguaglia quello di *A* nel piano *BD*.

Fig.93. III. Se i piani *CE*, *CD* ſono eguali in lunghezza, condotte perpendicolari *DG*, *EH* ſopra l'orizzonte, ſarà il momento di un peſo *F* nel piano *CD*, al momento d'un egual peſo *A* nel piano *EC*, come l'altezza *DG* all'altezza *EH*; peroechè il momento di *F* nel ſuo piano *DC*, al momento ſuo, o del peſo eguale *A* nel perpendicolo, ſta come *GD* a *DC*,

a *DC*, ed il momento di *A* nel perpendicolo ſta al momento del medeſimo peſo *A* nel piano *EC*, come *EC*, ovvero *CD*, che gli è eguale, al perpendicolo *EH*, dunque il momento di *F* per *CD* al momento di *A* per *EC*, ſta come *DG* ad *EH* per l' egualità ordinata.

IV. Data qualunque minima potenza *P*, e qualſivoglia gran peſo *A* ſi potrà da eſſa ſollevare queſto per mezzo di qualche piano, imperocchè ſe ſi fa un triangolo *BDI* di cui la lunghezza *BD* ſia alla perpendicolare altezza *BI* nella ſteſſa ragione, che ha il peſo *A* alla potenza *P*, è manifeſto poterſi ſoſtenere eſſo peſo nel detto piano con tale potenza *P*; onde ſe alquanto più s' inclinerà il piano *BD*, di manierachè la ſua lunghezza, alla ſua altezza ſia in ragione alquanto maggiore di *A* a *P*, prevarrà la potenza *P* al peſo *A*, e potrà ſollevarlo per eſſo piano colla direzione *AP* parallela al medeſimo. Fig. 95.

CAPITOLO VI.

Del Moto accelerato, e ritardato.

PROPOSIZIONE XXIV.

Se un mobile ſarà ſpinto da una forza continuamente applicata, la quale operi ſempre nella ſteſſa maniera, creſcerà la di lui velocità nella ſteſſa proporzione, in cui creſce il tempo del moto.

Chia-

Chiamaſi queſta ſorte di movimento, moto uniformemente accelerato,

Fig. 96. SI rappreſenti l'eſtenſione del tempo colla retta AP, diviſa in parti eguali quantoſivoglia piccole AB, BC, CD &c. ſe la forza applicata al mobile nella prima particella di tempo AB, gli avrà impreſſo un tal piccolo grado di velocità rappreſentato dall'ordinata BG, è manifeſto, che ſe la detta forza quindi in poi ceſſaſſe di ſpingere il mobile, eſſo ſeguirebbe a muoverſi equabilmente il reſto del tempo, colla velocità ricevuta, quando non gli foſſe diminuita, o affatto eſtinta da cauſa veruna (per la ſuppoſiz. 3.); ma durando la forza motrice a ſpingere il mobile, biſognerà, che nella ſeguente particella di tempo BC, oltre la velocità CM, eguale a BG, mantenutaſi nel mobile, gli s' imprima un altro grado di velocità MH, eguale al primo BG, e però nel fine del tempo AC doppio di AB, avrà il mobile la velocità CH doppia della prima BG. Similmente ſe ceſſaſſe la forza motrice dopo il tempo AC di ſpingere il mobile, ſeguirebbe a muoverſi equabilmente con eſſa velocità CH, ma ſeguitando eſſa forza a premerlo come prima, nel fine della terza particella di tempo CD alla velocità DN, mantenuta eguale a CH, gli ſi aggiungerà l' altro grado di velocità NI, eguale al primo BG; onde nel fine del tempo AD, triplo di AB, averà il mobile la velocità DI tripla della prima BG, e così di mano in mano ſeguitando la forza a ſpingere il mobile uniformemente, gli accreſcerà la velocità nella ſteſſa proporzione, in cui ſi aumenta il tempo

po del moto, di manierachè quante volte sarà moltiplice il tempo AP, della prima particola AB, altrettanto sarà moltiplice la velocità PZ, acquistata nel fine del tempo AP, della prima velocità BG, acquistata nel minimo tempo AB. Il che &c.

COROLLARI.

I. I corpi gravi discendono con moto uniformemente accelerato nella suddetta maniera, supponendosi spinti da una forza di gravità costante, la quale sebbene si crede da molti non mantenersi eguale in qualunque distanza dal centro della terra, anzi variarsi in ragione reciproca de' quadrati delle distanze, tuttavolta essendo la superficie del globo terrestre distante dal suo centro per più di 360. miglia, quando si considera la discesa di un grave per l'altezza di 100. braccia, o ancora d'un miglio, non diventa sensibilmente minore la distanza del mobile da esso centro, e però non deve considerarsi la forza della gravità fatta disuguale, ma deve attenderſi come forza costante; ed esponendo il tempo del moto per qualsivoglia retta AP, applicando ad essa un triangolo APZ, le velocità acquistate in varie parti de' tempi AD, AF, AP saranno come le ordinate DI, FL, PZ di esso triangolo.

II. Quando fossero due forze G, F applicate a diversi mobili (come accade ne' gravi eguali, cadenti per varj piani inclinati, in cui avendo momenti diversi, spinti sono con diversa forza) le quali uniformemente gli spingano per i tempi AB, DS, le velocità BC, SU, impresse nel fine di detti Fig. 97.

ti

ti tempi, ſaranno in ragione compoſta di quella delle forze, e di quella de' tempi, perchè fatti i triangoli *ABC*, *DSV*, e preſa *DE* eguale ad *AB*, ed ordinata *EH*, ſarà la velocità *BC* alla *EH*, come la forza *G* alla forza *F*, perchè eſſendo gli effetti proporzionali alle loro cagioni, eſſe velocità riſultanti da tali forze in tempi eguali *AB*, *DE* ſaranno proporzionali a dette forze, ma la velocità *HE* alla *SV*, è poi come il tempo *DE*, ovvero *AB* al tempo *DS*, dunque la ragione della velocità *CB* alla velocità *VS*, eſſendo compoſta di *CB* ad *HE*, e di *HE* ad *VS*, ſara compoſta della ragione delle forze, e di quella de' tempi.

III. Però ſe le forze ſaranno reciproche de' tempi, cioè *G* ad *F*, come il tempo *DI* al tempo *AB*, le velocità *CB*, *IK* quindi provenienti, ſaranno eguali, perchè *CB* ad *HE*, ſtando come *G* ad *F*, cioè come *DI* ad *AB*, ovvero a *DE* eguale ad *AB*, ſta come *IK* ad *HE*, e però *CB* eguaglia *IK*.

PROPOSIZIONE XXV.

Rappreſentandoſi i tempi di due moti dalle rette Fig.98. AT, IH, *cui ſiano applicate da una banda le rette* AF, EF, TF, *e le rette* IG, MG, HG *eſprimenti le forze, che in tali tempi ſpingono il mobile, quando ancora foſſero varie, e dall' altra banda le rette* BV, EV, TV, *e le rette* RC, MC, HC *rappreſentanti le velocità in que' tempi acquiſtate da eſſo mobile* (*le quali figure* AFFT, IGGH *ſi diranno piani delle forze, e le altre due* AVVT ICCH *piani delle velocità*) *ſarà la velocità* TV

al-

alla velocità HC, *come il piano delle forze* AF, FT *al piano delle forze* IG, GH.

DIvidanſi eſſi tempi in egual numero di parti infinitamente piccole, come *AB*, *BD*, *DE*, nella prima figura, ed *IR*, *RL*, *LM* nella ſeconda, ed applicatevi le rette in ambi i piani, ſi tirino dagli eſtremi delle velocità le rette *VN*, *VO* parallele ad *AT*, e le rette *CP*, *CQ* parallele ad *IH*, eſſendo le velocità (per il Coroll. 2. della Prop. 24.) in ragione compoſta delle forze, e de' tempi, ſarà *BV* ad *RC*, come il rettangolo *FAB* al rettangolo *GIR*, e parimente *NV* a *PC*, come il rettangolo *FBD* al rettangolo *GRL*, e ſimilmente *OV* a *QC*, come il rettangolo *FDE* al rettangolo *GLM*, e così ſempre; dunque la velocità *TV*, che è la ſomma di tutti gli antecedenti *BV*, *NV*, *OV*, e di quante differenze ſono interrotte tra le velocità, che vanno accreſcendo fino a *TV*, ſtarà alla velocità *HC*, ſomma de' conſeguenti *RC*, *PC*, *QC*, e di tutte l' altre differenze di velocità interpoſte fino alle velocità *HC*, come il piano delle forze *AFFT*, che è l' aggregato de' rettangoli antecedenti *FAB*, *FBD*, *FDE*, e di tutti gli altri inſcritti, o circoſcritti ad eſſo piano, al piano delle forze *IGGH*, che è l' aggregato de' conſeguenti rettangoli *GIR*, *GRL*, *GLM*, e di tutti gli altri, che ſi inſcriverebbero, o circoſcriverebbero a detta figura, eſſendo ancora le prime *BV*, *NV*, *OV* proporzionali alle terze grandezze *FAB*, *FBD*, *FDE*, ſiccome ancora le ſeconde *RC*, *PC*, *QC* proporzionali alle quarte *GIR*, *GRL*, *GLM*. Il che &c.

PROPOSIZIONE XXVI.

Fig. 99. *Gli ſpazj* TS, HL *fatti ne' tempi* AT, IH, *ſono proporzionali a' piani delle loro velocità* AVT, ICH.

DIviſi gli ſpazj in egual numero di parti infinitamente piccole *SO*, *OQ*, e *LK*, *KP*, e determinandoſi i tempi *ET*, *DE*, in cui ſono ſcorſi que' ſpazj, *SO*, *QO*, ed i tempi *HM*, *MR*, corriſpondenti agli ſpazj *KL*, *KP*, queſti ſpazj eſſendo in ragion compoſta de' tempi, e delle velocità, ſarà *SO* ad *LK*, come il rettangolo *ETV* al rettangolo *MIIC*, e così ancora *QO* a *PK*, come i rettangoli *DEV*, *RMC*, ed eſſendo eguali *OS*, *QO*, ſaranno eguali i rettangoli *ETV*, *DEV*, come ancora l'egualità di *LK*, *PK* ci moſtra eguali i rettangoli *MIIC*, *RMC*; dunque egualmente moltiplicati gli antecedenti, e gli conſeguenti, ſtarà tutto lo ſpazio *TS* allo ſpazio *HL*, come il piano delle velocità *AVT* all'altro *ICH*. Il che &c.

COROLLARI.

I. Quindi ſe con l'ultimo grado della velocità *TV* nello ſteſſo tempo *AT*, ſi farà lo ſpazio *G*, ſarà *TS*, a *G*, come *AVT* al rettangolo circoſcritto *ATVM*, le cui ordinate *DM*, *EN* eguali a *TV*, fanno il piano delle velocità coſtante eſercitata nel moto equabile,

II. Ne' moti de' gravi cadenti appreſſo la ſuperficie terreſtre, eſſendo il piano delle velocità un triangolo, di cui è doppio il rettangolo circoſcritto, ſarà lo ſpazio di moto equabile, colla velocità

ta acquiſtata nel fine del tempo, fatto in tempo eguale, doppio dello ſpazio ſcorſo nella caduta.

III. Gli ſpazj fatti col moto accelerato da un grave cadente, ſaranno come i quadrati de' tempi ſcorſi, perchè lo ſpazio fatto nel tempo *AD*, allo ſpazio fatto nel tempo *AT*, è come il triangolo *ADV* al triangolo *ATV*, che ſono i piani della velocità acquiſtate dal mobile in detti tempi cadente: onde eſſendo tali triangoli come i quadrati de' lati omologhi *AD*, *AT*, dunque gli ſpazj fatti in detti tempi, ſono come i quadrati de' tempi medeſimi. Fig. 100.

IV. Onde diviſo il tempo della caduta in quante ſi voglia eguali particelle, ſe nella prima il mobile diſcende un braccio, nel fine della ſeconda avrà ſcorſe quattro braccia, nel fine della terza braccia nove, nel fine della quarta braccia ſedici &c. così di mano in mano di maniera, che nelle parti eguali di tempo creſcono gli ſpazj ſecondo la ſerie de' numeri diſpari, perchè nel primo tempo avendo fatto uno ſpazio, nel ſecondo ne fa tre altri, nel terzo ne aggiunge cinque, nel quarto ſette, e così oltre va proſeguendo.

PROPOSIZIONE XXVII.

Se da i mobili AB *col moto accelerato, ſi fanno dalla quiete gli ſpazi* ACBC *ambidue perpendicolari, o ambidue nel medeſimo piano inclinato, poſta* CD *media proporzionale fra gli due ſpazi ſcorſi, ſarà il tempo dello ſpazio* AC *a quello dello ſpa-* Fig. 101

zio BC, *come* AC *alla media* CD, *o come questa media all' estrema* BC.

IMperciocchè lo spazio *AC* allo spazio *BC* è come il quadrato del tempo impiegato nel primo, al quadrato del tempo impiegato nel secondo (per il Cor. 3. prop. 26.) ma essendo *CD* media proporzionale fra le due *AC*, *BC*, starà *AC* a *BC*, come il quadrato *AC*, a quello della media *CD*, o come questo quadrato *CD* al quadrato dell' estrema *BC*; dunque i quadrati di *AC*, e di *CD*, ovvero di *CD*, e di *BC* sono come i quadrati de' tempi impiegati in detti spazj, e però i tempi sono come le dette linee *AC*, e *CD*, ovvero *CD* e *BC*. Il che &c.

COROLLARIO.

Ancora le velocità acquistate nel fine di tali spazi *AC*, *BC*, essendo proporzionali a i tempi (per la Prop. 24.) saranno come la prima *AC*, alla media *CD*, o come questa all' estrema BC.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Fig. 102. *Cominciando nello stesso istante due mobili da due punti diversi* A, B *a cadere per lo stesso perpendicolo, o per lo stesso piano inclinato verso l'Orizzonte* CG, *in cui seguitassero a muoversi colla velocità ottenuta da ciascuno nella loro caduta, converranno insieme nel punto* E, *dove l' orizzontale* CE *è doppia della* DC, *media proporzionale fra gli due spazi della loro discesa* AC, BC.

SI congiunga *DE*, e condotta l' orizzontale *BF*, tiriti *FG* parallela ad *AC*. Siccome *CE* è doppia

pia della *DC*, così *BF*, ovvero *CG* sarà doppia della *BD*, e conſeguentemente *GE* doppia di *BC*; perchè adunque il tempo dellla caduta del mobile *B* per *BC* può eſprimerſi per la ſteſſa *BC*, ſarà la media *DC* il tempo della caduta di *AC*: e perchè il mobile *B* colla ſua velocità acquiſtata in *C*, ſcorrerebbe equabilmente nell'orizzonte la parte *GE*, doppia di *BC*, nello ſteſſo tempo *BC* della ſua caduta (per il Coroll. 2. della prop. 26.) dunque nel tempo *BD*, ſcorrerebbe equabilmente lo ſpazio *CG* doppio di *BD*, onde nel moto equabile di tutta la *CE*, impiegherà il tempo *DC*, ovvero avendo impiegato nella caduta *BC* il tempo *BC*, e nello ſpazio orizzontale *CG* il tempo *DB*, nello ſteſſo tempo *DC*, in cui cade il mobile *A* per la retta *AC*, il mobile *B* avrà fatto gli ſpazi *BC*, e *CG*, ed eſſendo *CE* a *GE*, come *DC* a *BC*, cioè come la velocità acquiſtata dal mobile *A*, a quella acquiſtata dal mobile *B* (per il Cor. della preced.) dunque nello ſteſſo tempo *BC*, in cui il mobile *B* proſeguirà lo ſpazio da *G* in *E*, ancora il mobile *A* ſi moverà equabilmente colla propria velocità da *C* in *E* (per il Coroll. della Prop. 2.) pertanto nel detto punto *E* gli due mobili giungeranno inſieme. Il che &c.

COROLLARI.

I. Nel cerchio *BHC* tirato il diametro verticale *BC*, e la tangente del vertice *BA*, indi condotta una retta *AI* parallela al diametro *BC*, e da' punti *H*, *I*, in cui ſega l'arco ordinate le rette *HDF*, *IEG*, che ſaranno eguali al doppio di *AB*, perchè il diametro le taglia per mezzo, e ſono Fig. 103.

le parti, HD, IE, eguali ad AB, dico che il mobile A cadendo per AH, e colla ſua velocità acquiſtata proſeguendo equabilmente il moto per HF, ovvero cadendo da A in I, e colla velocità ivi conceputa movendoſi equabilmente per IG, ſi faranno nello ſteſſo tempo, tanto gli due ſpazj AH, HF, quanto gli due AI, IG, eſſendo le dette orizzontali doppie di AB, la quale è la media proporzionale tra gli due ſpazj AH, AI, per eſſere il quadrato della tangente AB eguale al rettangolo HAI.

II. Poſta la CE doppia dello ſpazio fatto per la caduta BC: ſe il mobile B colla velocità acqui-
Fig. 101. ſtata per lo ſpazio BC, ſi moverà equabilmente per CE, ſi faranno queſti due moti in tempo minore di quali ſi vogliano altri moti, fatti da un' altro mobile A per la caduta AC maggiore, o minore della BC, inſieme col moto equabile per la ſteſſa CE colla velocità acquiſtata nella caduta AC per la ſteſſa linea, BC, o perpendicolare, o inclinata all' orizzonte; imperocchè preſa la media proporzionale DC fra le due cadute AC, BC, eſſendo DC il tempo della caduta BC, ed AC quello della diſceſa AC, ſarà pure DC il tempo del moto equabile, che deve farſi dal mobile B, per CE dupla di CB, dunque il tempo per le due rette BC, CE ſarà duplo di eſſa DC, ma il tempo del mobile A per CE, a quello del mobile B per lo ſteſſo ſpazio CE, eſſendo reciproco delle loro velocità (per il Coroll. 2. della prop. 3.) le quali ſono proporzionali alle rette DC, BC, ſarà dunque il tempo del moto di A per CE, al tempo di B per la ſteſſa CE, come BC a DC, dunque il tempo per AC, e per CE ſarà eſpreſſo dalla ſomma delle due AC,

e BC,

e *BC*, le quali ſono ſempre maggiori del doppio della media *CD* (per la prop. 25. del 5. degli Elem.) dunque ſarà più lungo il tempo per *AC*, e per *CE*, che per *BC*, e *CE*, onde queſto è il minimo di qualunque altro.

PROPOSIZIONE XXIX.

Benchè ſuppongaſi dal Galileo, e dal Torricelli, che il mobile caduto ſu l' orizzonte, poſſa muoverſi in eſſo colla velocità acquiſtata nel fine della caduta: ciò non deve ordinariamente ſuccedere, ma il mobile, o ſi rifletterà dal piano, o ſi fermerà in eſſo, cadendovi per la perpendicolare AB, *oppure diſcendendo per un piano inclinato* AC, *vi proſeguirà equabilmente il moto con una velocità minore di quella ottenuta nel fine della diſceſa, a cui ſtarà in proporzione della* BC *alla* CA. Fig. 104.

IMperocchè cadendo perpendicolarmente una palla nel piano orizzontale, o ſi ribalza all' insù ſe vi ha qualche forza elaſtica, o ſi ferma nel piano della caduta, che colla ſua reſiſtenza totalmente ſi oppone alla velocità, con cui viene impreſſo, e perchè detta perpendicolare facendo angolo retto con qualſivoglia linea condotta dal punto *B* ſopra al piano orizzontale, non vi ha ragione alcuna, per cui il mobile debba ſeguitare a muoverſi più toſto per una parte, che per l' altra, eſſendo a tutte indifferente la ſua direzione. Ma cadendo il mobile per un piano inclinato *AC*, e tirata la perpendicolare *AB* ſopra l' orizzonte, compiuto il parallelogrammo *ABCD*, ſi vede che il moto *AC* è compoſto della velocità *AB* oppoſta al piano o-

rizzontale, e dell' altra BC, ovvero AD parallela all' orizzonte, onde con queſta ſola dovrà il mobile proſeguire il viaggio equabilmente per la CE, rimanendo l' altra velocità AB eliſa dalla reſiſtenza del piano, ſopra di cui il mobile è ſoſtenuto; dunque la velocità, con cui può muoverſi il mobile per l' orizzonte, non è tutta quella, che ſi è acquiſtata nel fine del moto accelerato per il piano AC, ma è minore di eſſa, ſtando alla medeſima come il ſeno BC dell' angolo CAB al ſeno totale AC, che corriſponde all' angolo retto.

COROLLARI.

Fig. 105. I. Diſcendendo due diverſi mobili A, B da diverſi punti nel medeſimo piano, poſta nell' orizzonte la CE doppia di CH intercetta fra il punto C, e la perpendicolare DH condotta dal punto D, termine della CD, media proporzionale fra gli due ſpazi AC, BC, converranno eſſi mobili A, B, dopo la loro caduta, proſeguendo il moto ſopra l' orizzonte, nel punto E; imperocchè ſiccome gli tempi delle diſceſe AC, BC ſono come DC a BC, ancora le velocità ivi acquiſtate ſono nella ſteſſa ragione; ma condotta ſull' orizonte la perpendicolare BG il mobile B in vece della velocità BC, impiegherà la velocità CG nel ſuo moto equabile, ed il mobile A in vece della DC impiegherà la velocità CH; dunque ſiccome il mobile B nel tempo DC, farebbe colla velocità CB il doppio di eſſa CD, così nel medeſimo tempo colla velocità GC doverà fare la CE doppia di CH, per eſſere le velocità BC, e GC proporzionali agli ſpazi DC, e CH. Similmente il mobile A, ſic-

co-

come nel tempo *BC* faceva colla propria velocità *DC* il doppio di eſſa *CD*, così colla velocità *CH* farà il doppio di *CH*, che è la ſteſſa *CE*, dunque tanto la diſceſa *BC* col moto *CE* ſi fa ne' due tempi *BC*, *CD*, quanto la diſceſa *AC* col moto *CE* ſi fa ne' due tempi *CD*, e *BC*; dunque ſe tutti due i mobili nello ſteſſo iſtante hanno principiato il loro moto da *B*, e da *A*, giungeranno nel medeſimo tempo al punto *E*, dove inſieme concorrerano.

II Poſta l' orizzontale *CE* doppia della *CG*, il viaggio della caduta *BC* coll' orizzontale *CE*, ſi farà in minor tempo, che qualunque altra caduta *AC* maggiore, o minore, con lo ſteſſo moto nell' orizontale *CE*. Imperocchè ſe il tempo per *AC*, è *AC*, ed il tempo per *BC* è la media *DC*, queſto ſteſſo ſervirebbe a fare colla velocità *DC* nell' orizzonte, il duplo di *BC*; onde ancora colla velocità *CG* nello ſteſſo tempo ſi farà la *CE* doppia di *CG*; dunque il tempo del viaggio per *BCE* ſarà il duplo *CD*; ma ſe il mobile *B* ſpende il tempo *DC* nel fare l' orizzonte *CE* colla velocità *CG*, il mobile *A* ſpenderà il tempo *BC* nel fare la ſteſſa orizzontale colla velocità *CH*, dovendo eſſere i tempi reciprochi delle velocità, ed eſſendo *DC* a *BC* come *CH* a *CG*, dunque il tempo del viaggio *ACE*, ſarà la ſomma di *AC*, e di *BC*, che è maggiore del duplo della *CD*, e però ſi ſpenderà più tempo per *AC*, e per *CE*, che per *BC*, e *CE*. Fig. 106

III. Ancora paſſando il mobile *A* da un piano inclinato *AC*, in un altro inclinato *CE*, non vi paſſerà coll' iſteſſa velocità *AC* guadagnataſi nella cadu- Fig. 107

duta, ma colla ſola parte *BC*, che è alla *AC*, come il ſeno dell' angolo *CAB*, contenuto dal primo piano, e dal perpendicolo *AB*, tirato ſopra il ſecondo piano, al ſeno totale corriſpondente all' angolo retto; e ſe doveſſe paſſare in un altro piano *Ce*, il quale fa un angolo più acuto col primo *AC*, paſſerebbe il mobile *A* ſopra di eſſo con velocità alquanto maggiore, perchè tirata l' altra perpendicolare *Ab* ſopra queſt' altro piano, il ſeno *Cb* è maggiore del ſeno *CB*: onde quanto più acuto è l' angolo *ACB*, più ſi accoſta la velocità, con cui deve paſſare nel ſecondo piano il mobile, alla velocità da eſſo acquiſtata per la caduta *AC*.

Fig. 108. IV. Onde facendoſi l' angolo *ACB*, ovvero *DCG* infinitamente piccolo, cioè minore di qualunque angolo acuto rettilineo, come è quello fatto dalla tangente *AC* con una curva *BCG*, e queſta pure eſſendo toccata dall' orizzontale *FE* per l' angolo infinitamente piccolo *FGB*, potrà il mobile ripaſſare dalla retta *AC* nella curva *CG* colla ſteſſa velocità acquiſtata in *C*, e quindi da eſsa curva prolungherà il moto per l' orizzontale *FE* colla velocità conceputa nel fine delle diſceſe *AC*, *CG* come era ſuppoſto dagli antichi Geometri.

PROPOSIZIONE XXX.

Tavola XIII. Fig. 109. *Il tempo della caduta nel perpendicolo* AB *ſta al tempo per l' inclinato piano egualmente alto* AD, *come* AB *ad* AD.

SUppongaſi, che nello ſteſso tempo in cui ſi fa l' inclinato piano *AD* ſi faceſse nel perpendicolo la lunghezza *AC*; ſtarà dunque *AC* alla *AD*, co-

come la velocità conceputa in *C* alla velocità conceputa in *D*, perchè con tali velocità farebbe nello ſteſſo tempo il duplo di *AC*, ed il duplo *AD* con moto equabile; ma la velocità in *C* alla velocità in *D* acquiſtate nello ſteſſo tempo, quella dalla gravità nel perpendicolo, queſta dalla gravità nel piano inclinato, ſtarebbe come la prima forza alla ſeconda, cioè come *AD* ad *AB*, però ſe il tempo per *AB* ſia eſpreſſo dalla medeſima *AB*, ſarà il tempo per *AC* eſpreſſo dalla *AD* media proporzionale fra le due *AB*, *AC*; ma il tempo per *AC* ſi ſuppone lo ſteſſo, che il tempo per *AD*; dunque la medeſima *AD* eſpone il tempo per *AD*, e però i tempi per la perpendicolare *AB*, e per l' inclinato piano *AD* egualmente alto, ſtanno come la lunghezza del perpendicolo alla lunghezza del piano.

COROLLARI.

I. Se ſaranno due piani *AE*, *AD* diverſamente inclinati all' orizzonte, di eguale altezza, ſaranno i tempi per la caduta di eſſi proporzionali a' medeſimi piani, perchè il tempo per *AD* eſſendo a quello per *AB*, come la ſteſſa *AD* alla *AB*, e queſto tempo per *AB* eſſendo al tempo per *AE*, come *AB* ad *AE*; dunque per l' egual proporzione il tempo per *AD* a quello per *AE* ſta come *AD* ad *AE*. Fig. 109.

II. Perchè tutto il tempo per *AD* ſtà a tutto quello per *AE*, come *AD* ad *AE*, e tirata la *GF* orizzontale, ſtarebbe ancora come *AF* ad *AG*, o come il tempo per *AF* al tempo per *AG*, ancora il tempo per la reſidua *FD* dopo la caduta *AF*, ſtarà al tempo della reſidua *GE* dopo la caduta *AG* Fig. 109.

AG nella ſteſſa proporzione di AD ad AE, ovvero di FD a GE.

Fig.110. III. Avendo ſuppoſto il tempo per AD, nella coſtruzione, eguale al tempo per la perpendicolare AC, congiunta DC ſarà il triangolo CAD ſimile all' altro BAD, avendo intorno allo ſteſſo angolo A, i lati CA, AD ed AD, AB proporzionali; però l' angolo ADC ſarà eguale al retto ABD, ed il ſemicircolo deſcritto ſopra il diametro AC dovrà paſſare pel punto D; onde i tempi per tutte le corde inſcritte nel ſemicircolo dal punto ſublime A come AD, AE ſono eguali al tempo per lo diametro AC, eſſendo ancora AC ad AE come AE alla ſua perpendicolare AF, ed ancora le corde CE, CD ſi paſſerebbero in egual tempo, perchè compiuti i rettangoli $ADCH, AECG$, le rette CE, CD ſaranno eguali all' oppoſte GA, AH, ed egualmente inclinate, e però in egual tempo con eſſe dovrebbero ſcorrerſi.

IV. Gli gradi di velocità acquiſtati dalla ſteſſa altezza in D, e in B ſono eguali, perchè eſſendo gli ſpazi AD, AB proporzionali a' tempi, con cui ſono ſcorſi acceleratamente, e con cui potrebbero paſſarſi equabilmente i doppj di eſſi con le ultime velocità, biſogna che tali velocità ſiano eguali.

Fig.111. V. Se dall' iſteſſo parete verticale DF s' inclinano varj piani allo ſteſſo punto A del pavimento orizzontale AF, quello per cui poſſa un grave ſcorrere in minor tempo d' altro, ſarà il piano BA inclinato ad angoli ſemiretti col muro, e col pavimento, perchè tirata l' orizzontale BC, e la verticale AC, ſaranno queſte eguali, facendo l' angolo ſemiretto, l' una, e l' altra col piano BA;

dun-

dunque il cerchio descritto col raggio *CA* passa per *B*, ove sarà toccato dal muro, onde inclinato qualunque altro piano *AD* segherà la circonferenza in *E*, e però il tempo per *DA* essendo maggiore di quello per la corda *EA*, il qual tempo è il medesimo colla corda *BA*, ne segue, che il piano *BA* si scorre in minor tempo di qualunque altro.

VI. Ma essendo un punto *A* fuori del piano *DF* inclinato all'orizzonte, condotta in esso la perpendicolare *AF*, e la verticale *AD*, se si dividerà l'angolo *FAD* per mezzo colla retta *AB*, sarà il tempo per *AB*, o per *BA*, più breve del tempo per qualsivoglia altro inclinato dal medesimo punto *A*, allo stesso piano *FD*, perchè tirata *BC* parallela ad *AF*, e però perpendicolare anch' essa al piano *FD*, sarà l'angolo *CAB* eguale all'angolo *CBA*, che pareggia l'alterno *BAF*; onde il cerchio descritto col centro *C* per *A*, passerà per *B*, ed ivi toccherà il piano *DF*; onde qualunque altro piano condotto dal punto *A* sopra *FD* dovrà passarsi in maggior tempo che il piano *AB*, perchè segherà l'arco, e sarà maggiore della corda intercetta da esso semicircolo. Fig. 112.

PROPOSIZIONE XXXI.

Se la forza F *muove nel tempo* CD, *il mobile B, e in egual tempo* HL *il mobile* A, *con moto accelerato, la velocità* DG *impressa al primo, alla velocità* LM *impressa nel secondo, starà reciprocamente come la quantità di materia, che è nel mobile* A *a quella, che è raccolta nel mobile* B. Fig. 113.

Im-

IMperocchè in qualunque minima particella eguale di tempo CE, HI la ſteſſa forza operando con tutta la ſua energìa, dovrà produrre un effetto eguale, onde riſulterà un eguale momento in ambidue i detti mobili, e però dovrà eſſere il grado iniziale di velocità ER impreſſo nel mobile B, al grado iniziale di velocità IK impoſto nel mobile A, come reciprocamente la quantità di materia, che è in A a quella di B, perchè così i momenti ſaranno eguali; eſſendo dunque i gradi primi, ed elementari delle velocità ER, IK reciprochi alle quantità di materia de' mobili A, B, è manifeſto, che ancora i loro egualmente moltiplici DG, LM impreſſi ne' mobili medeſimi ſul fine de' tempi eguali CD, HL ſaranno reciprochi alle maſſe de' mobili A, B, cioè alle quantità delle loro materie. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se due ſorze F, N proporzionali alle maſſe de' mobili B, A, nel fine di eguali tempi CD, HL gli averanno impreſſe le velocità DP, LM, queſte ſaranno eguali; imperocchè ſe la forza N ſpinto aveſſe nel tempo CD il mobile B, gli averebbe impreſſa la velocità DG, che ſarebbe all' altra DP, come la forza N alla forza F, cioè come la maſſa di A a quella di B, ma ſecondo queſta propoſizione, eſſendo moſſi dalla ſteſſa forza N i mobili B, A, ne' tempi eguali CD, HL, le velocità loro impreſſe DG, LM ſono nella reciproca proporzione della maſſa di A a quella di B, cioè come DG a DP; dunque LM, DP ſono velocità eguali.

II. Eſ-

II. Eſſendo dunque le forze della gravità in varii mobili proporzionali alle loro maſſe, cioè alle quantità di materia contenute in eſſe, come un pezzo di pietra maggiore, ed uno minore della ſteſſa ſpecie, o ancora due corpi di ſpecie diverſa, uno di ferro, e uno di marmo, avendo la gravità proporzionale alle quantità di materia in eſſi contenute, dovranno in qualunque iſtante della ſua diſceſa ricevere eguali gradi di velocità; onde in egual tempo caderebbero dalla ſteſſa altezza nel voto, ed anche ſi vede, che ogni ſorte di corpo cade per l' aria quaſi colla ſteſſa velocità, ſe non in quanto vi ſi oſſerva qualche piccolo divario per la maggior reſiſtenza, che in queſto mezzo incontrano i corpi più leggieri, sì per aver maggior ſuperficie de' più gravi a proporzione del loro peſo, e sì ancora, perchè i più leggieri perdono maggior parte della ſua gravità, che i più gravi, come per eſempio ſe un corpo ha un peſo cento volte maggiore di quello dell' aria, in pari mole ſi diminuiſce la ſua gravità dentro l' aria per un centeſimo, e ſe un corpo più leggiero foſſe ſolamente dieci volte più peſante dell' aria in pari mole, ſi diminuiſce la ſua gravità per una decima parte, la quale però è maggiore della centeſima perduta dall' altro corpo più grave.

III. La velocità, che acquiſta un corpo in un dato tempo diſcendendo per qualche fluido, alla velocità, che nel medeſimo tempo ſi ſarebbe da eſſo acquiſtata, o da qualunque altro mobile nel voto, ſarà come il ſuo peſo comparativo (cioè l' eccеſſo del proprio peſo, ſopra quello del fluido in pari mole) al ſuo peſo aſſoluto; imperocchè

perocchè ſe il mobile aveſſe ſolamente tanto peſo, quanto in egual mole ha il fluido, ſi equilibrerebbe con eſſo in qualunque ſito ſenza diſcendere, onde ſe il mobile diſcende per eſſo fluido vi è ſpinto ſolamente dal peſo comparativo, cioè da quello, che ha di più del fluido in pari mole, ma nel voto ſarebbe ſpinto in giù da tutto il ſuo peſo aſſoluto, e però le velocità in egual tempo acquiſtate nel fluido, e nel voto dallo ſteſſo mobile ſono proporzionali a tali forze, cioè come il peſo comparativo al peſo aſſoluto.

IV. eſſendo la velocità in un dato tempo acquiſtata dal mobile cadente in un fluido a quella, che nello ſteſſo tempo avrebbe conceputa nel voto come il peſo comparativo al ſuo peſo aſſoluto, e queſta velocità acquiſtata nel voto a quella, che nel medeſimo tempo cadendo per un altro fluido ſi acquiſterebbe, come lo ſteſſo peſo aſſoluto a queſt' altro peſo comparativo, ne ſegue, che le velocità acquiſtate in diverſi fluidi nel medeſimo tempo ſono proporzionali a' peſi comparativi di eſſo mobile paragonato a tali fluidi: per eſempio peſando un mobile grani 1200. eguali in mole ad un aria peſante un grano ſolo, ed all'acqua, che peſi mille grani, ſara il peſo comparativo del mobile nell'aria grani 1199. ed il peſo comparativo dell' aria grani 200. onde la velocità acquiſtata in uno ſteſſo tempo dal mobile nell' aria, e nell' acqua ſarà in ragione di 1199. a 200.

V. Le velocità poi acquiſtate da due diverſi mobili, in diverſi fluidi nel medeſimo tempo ſaranno in ragione compoſta della diretta de' loro peſi comparativi, e della reciproca de' loro peſi aſſoluti;

per-

perchè la velocità del primo mobile nel primo fluido alla velocità, che acquiſterebbe nel medeſimo tempo nel voto, è come il ſuo peſo comparativo al ſuo peſo aſſoluto, e la velocità eguale, che acquiſterebbe il ſecondo mobile nel voto, a quella, che acquiſterà nello ſteſſo tempo dentro il ſecondo fluido, ſarà come il peſo aſſoluto del ſecondo mobile, al ſuo peſo comparativo, dunque la velocità acquiſtata dal primo mobile nel primo fluido, a quella acquiſtata dal ſecondo mobile nell' altro fluido, è in ragione compoſta del peſo comparativo del primo mobile al ſuo peſo aſſoluto, e dell' altro peſo aſſoluto del ſecondo mobile, al di lui peſo comparativo, cioè come il prodotto del peſo comparativo del primo, e dell' aſſoluto del ſecondo, al prodotto del peſo comparativo del ſecondo mobile nel peſo aſſoluto del primo, il che importa la ragione compoſta della diretta de' peſi comparativi, e della reciproca degli aſſoluti.

PROPOSIZIONE XXXII.

Allo ſpazio AH *del moto accelerato, ſiano ordinate le rette* AF, SG, HP, *rappreſentanti le forze, che in tali punti ſpingono il mobile, e dall' altra banda ſiano ordinate le rette* SC, HV *rappreſentanti le velocità acquiſtate in quelle diſceſe* AS, AH: (*ſi dirà lo ſpazio* AFPH *la ſcala delle forze, e lo ſpazio* ACVH, *la ſcala delle velocità*) *tirate le rette* CE, VI *perpendicolari alla curva* ACV *ſaranno le rette ſubnormali* SE, HI, *cioè le intercette nell' aſſe fra qualunque ordinata* Fig. 114

ta, e la perpendicolare alla curva, proporzionali alle forze corrispondenti SG, HP.

SI piglino le parti dell' asse *BS*, *DH*, scorse in eguali particelle di tempo infinitamente piccolo, e si ordinino le *BN*, *DM* alla detta scala delle velocità, le quali saranno infinitamente prossime alle ordinate *SC*, *HU*, sicchè i punti *N*, *M* della curva, saranno come a ridosso alle tangenti de' punti *C*, *V*, e tirate le parallele all' asse, *NQ*, *MR*, le particelle delle ordinate *QC*, *RV*, mostreranno gli augumenti momentanei di velocità, che acquista il mobile in dette eguali particelle di tempo, e però saranno come le forze corrispondenti *SG*, *HP*. Ma essendo *QC* a *QN*, come *ES* ad *SC*, per la similitudine de' triangoli *NQC*, *CSE*, e lo spazio *QN* essendo ad *MR*, come *BS* a *DH* fatti in tempi eguali, e però come le velocità *SC*, *HV*, e finalmente essendo *MR* ed *RV*, come *HV* ad *HI*, dunque per l' egualità ordinata, sarà *QC* ad *RV*, come *SE* ad *HI*, e però essendo la prima alla seconda, come la forza *GS* alla forza *PH*, starà ancora la terza alla quarta nella stessa ragione delle forze, come dovea dimostrarsi.

COROLLARI.

Fig. 114. I. Dunque per rappresentare le forze, si possono applicare allo spazio *ASH* in ciascuno de' punti *SH* le rette *SG*, *HP*, eguali respettivamente alle subnormali *SE*, *HI*, che loro corrispondono nella scala delle velocità *ACVH*.

II. Gli spazi della scala delle forze *AFGS*, *AFPH*, sono come i quadrati delle velocità corrispon-

risspondenti SC, HV, essendo stato dimostrato nel Coroll. 6. Prop. 1. della seconda Appendice delle nostre quadrature, che lo spazio $FASG$ composto delle subnormali, eguaglia la metà del quadrato dell'ordinata SC, siccome lo spazio $AFPH$ eguaglia la metà del quadrato dell'ordinata corrispondente HV.

III. Nel moto accelerato della gravità costante, essendo gli spazi come i quadrati delle velocità, e però la scala delle velocità $ACVH$ essendo una parabola, in cui le abscisse AS, AH sono come i quadrati delle ordinate SC, HV, le subnormali SE, HI sono sempre eguali alla metà del lato retto, e però la scala delle forze è un parallelogrammo $AFPH$, essendo da per tutto esse forze eguali. Fig. 115.

IV. Se le forze AF, SG, HP, fossero proporzionali alle distanze AT, ST, HT dal centro, o dal termine del moto T, come da alcuni Autori si crede essere la gravità, sarà la scala delle forze AFT un triangolo, e la scala delle velocità un quarto di cerchio $ACXT$, perchè essendo il raggio TC perpendicolare alla circonferenza, la stessa TS è subnormale, e similmente essendo il raggio TV perpendicolare alla medesima circonferenza, la retta TH è subnormale, e però sono ST, HT proporzionali alle forze SG, HP. Fig. 116.

V. E se le forze fossero in reciproca ragione delle distanze, la scala delle forze sarebbe una Iperbola d'Apollonio FGP fra gli Assintoti AT, TZ, per essere in essa GS a PH, come reciprocamente la distanza HT alla distanza TS, ed allora la scala delle velocità ACV, sarebbe una Logistica del Fig. 117.

ſecondo grado, in cui i quadrati delle ordinate *SC*, *HV*, ſono come la ragione di *AT* a *CN*, alla ragione di *AT* ad *VM*, di manierachè le velocità *SC*, *HV* ſono in ſubduplicata ragione de' Logaritmi delle diſtanze *ST*, *HT*, come raccoglieſi da ciò, che ho detto nella propoſizione 10. del mio libro degl' infiniti.

Fig. 117. VI. Ma ſe le forze ſono reciproche de' quadrati delle diſtanze, come vien ſuppoſto veriſimilmente da molti Filoſofi, e Mattematici ſarebbe la ſcala di eſſe *FGP* un' Iperbola quadratica, eſſendo *GS* a *PH* come il quadrato *TH*, al quadrato *TS*; e la ſcala delle velocità ſarebbe la verſiera *ACVX* da me deſcritta nel libro delle quadrature (prop. 4) di manierachè le velocità *SC*, *HV* ſaranno in ragione compoſta della ſubduplicata degli ſpazj ſcorſi direttamente *AS*, *AH*, e della ſubduplicata delle diſtanze reciproche *TH*, *TS*.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Fig. 118. *Se ſi farà una figura* AZLMT *reciproca della ſcala delle velocità* ACVT, *ſarà l' area* AZMT *a qualſivoglia ſua porzione* AZLH, *come il tempo impiegato nello ſcorrere lo ſpazio* AT, *al tempo impiegato nello ſpazio* AH *corriſpondente all' altra porzione*.

IMperocchè preſe due parti *HI*, *TE* dello ſpazio, fra di loro eguali, ma infinitamente piccole, ſarà il tempo per *ET* al tempo per *IH*, come reciprocamente la velocità *HC* alla velocità *TV*; ma ſi ſuppone eſſere ancora *TM* ad *HL* come reciprocamente *HC*, a *TV*, dunque il tem-

po

po per lo ſpazietto *ET* al tempo per l'altro *IH*, ſta come *TM* ad *HL*, o come il rettangolo *MTEX* all'altro egualmente alto *LHIY*, e così ſempre; dunque il tempo per tutta la *AT* compoſto di tante particelle di tempo, quante ſono le parti eguali ad *ET* nello ſpazio *AT*, ſta al tempo per la porzione *AH*, che ſimilmente è l'aggregato di tutte quelle particelle di tempo, che ſi ricercano per paſſare tutte le parti eguali ad *HI*, come l'area *AZMT* compoſta di tutti i rettangoli infinitamente piccoli *MTEX*, all'area *AZLH* compoſta di tutti i rettangoli *LHIY*. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se la ſcala delle velocità è una Parabola *ACVT*, come nell'Ipoteſi della gravità coſtante, ſarà la ſua reciproca *AZMT* un'Iperbola quadratica, in cui il quadrato *MT* al quadrato *LH*, ſtia come *AH* ad *AT*, eſſendo queſta la ragione del quadrato *HC* al quadrato *TV* nella Parabola: ed è l'area *AZMT* dupla del rettangolo *ATM*, ſiccome l'area *AZLH* è dupla del rettangolo *AHL*, come dimoſtrai negli Ugeniani (Cap 8 num. 11.), dunque il tempo per *AT* al tempo per *AH*, è come il rettangolo *MTA* al rettangolo *LHA*, cioè in ragione compoſta di *MT* ad *LH*, oppure di *HC* a *TV* e di *TA* ad *AH*, cioè del quadrato *TV* al quadrato *HC*, le quali due ragioni fanno quella di *TV* ad *HC*, e però in tale Ipoteſi la ſcala de' tempi è la medeſima Parabola, che ſerve di ſcala alle velocità. Fig. 118.

II. Ma nell'Ipoteſi delle forze proporzionali alle diſtanze dal termine *T*, eſſendo la ſcala delle Fig. 119.

velocità un quarto di circolo ATX, la ſua figura reciproca $TMLZA$ (per il Coroll. 5. della prima appendice delle quadrature) ſarà la ſteſſa con quella figura ivi conſiderata nel Cor. 3. la di cui area $ATMZ$ è dupla del quadrante, e qualunque porzione $AZLH$ è dupla del ſettore corriſpondente ATV, come ivi ho dimoſtrato; onde il tempo per tutta la AT al tempo per la parte AH, è come il quadrante ATX al ſettore ATU, cioè come l'arco AX all'arco AV, onde in queſta Ipoteſi gli ſpazj ſcorſi AS, AH ſono i ſeni verſi, le velocità SC, HV i ſeni retti, le forze come i ſeni del complimento CR, VN, eguali alle diſtanze ST, HT, ed i tempi ſono come gli archi circolari AC, AV.

III. Ma ſe le forze foſſero reciprocamente pro-
Fig. 117. porzionali alle diſtanze dal termine T, eſſendo allora la ſcala delle velocità una Logiſtica del ſecondo grado $ACVXT$, ſarebbe il tempo per AS al tempo per AH, come l'area $ACNT$ all'area $AVMT$, perchè la ſuttangente preſa nell'aſſintoto è reciproca delle ordinate in queſta curva come ho dimoſtrato (nel Cap. 2. Prop. 10. degl'infiniti) onde la figura reciproca alla ſcala delle velocità, ſarebbe correlativa ad eſſa, e però eguale alle porzioni ſopraddette della ſteſſa figura come dimoſtro nel capo ottavo degli Ugeniani al num. 2.

IV. Che ſe ſi ſuppongono le forze reciproca-
Fig. 120. mente proporzionali a' quadrati delle diſtanze, eſſendo la ſcala delle velocità la verſiera $ACUZ$, preſe due parti eguali da ambi i termini del diametro AS, TH, ed ordinate le retre SC, HV ſarà il tempo per AT al tempo per AS, come l'a-

rea

rea *ACZT* all' area *HVZT*, tagliata dall' altra ordinata, cioè come il quadruplo del ſemicircolo genitore *AMT*, al quadruplo del ſegmento miſto *TMA*, ovvero *AOT*, onde il tempo per *AS* al tempo per *AH*, ſarà come il ſegmento miſto *AOT* all' altro miſto ſegmento *AMT*, oppure come la ſomma' dell' arco *AO*, e del ſeno *OS*, alla ſomma dell' arco *AM*, e del ſeno *MH*, il che ci dimoſtra, che in queſta Ipoteſi la ſcala del tempo ſarà la Cicloide *AFBDT*, in cui qualunque ordinata *SF* uguaglia la ſomma dell' arco *AO*, e del ſeno *OS*, e qualunque altra ordinata *HB* è eguale all' arco *AM*, ed al ſeno *HM*.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Se un mobile A *a cui ſia impreſſa una velocità* LA, *ſi manda in ſu per una direzione AC, la quale, o ſia perpendicolare all' Orizzonte, o ſopra un piano inclinato, che regga il detto mobile, ne ſuccede il moto ritardato, di cui ſi verificano tutte le proprietà già dimoſtrate del moto accelerato, ma con ordine inverſo, cioè principiando dal termine del moto.* Fig. 121.

ESprima *AP* l' eſtenſione del tempo, e ſuppongaſi, che il grave *A* nel tempo *AH*, doveſſe cadendo acquiſtarſi la velocità *HK* eguale all' impreſſa *LA*, e compiuto il rettangolo *AHKL*, e tirato il diametro *AK*: ſarebbe il triangolo *AHK* il piano della velocità del moto accelerato nella caduta del tempo *AH*; dunque il mobile *A* ſpinto all' insù colla velocità *LA*, ſe non foſſe grave ſi alzerebbe con moto equabile, col piano di velocità *AHKL*, ma eſſendo grave, l' azione della

gravità, che gli contraſta in tutto il tempo della ſalita, gl' imprime ne' tempi *AG*, *AT*, le velocità *GN*, *TX* direttamente contrarie alla velocità impreſſavi, e però in detti tempi *AT*, *AG* in vece di ritenere tutta la velocità *LA*, eguale alle ordinate *GM*, *TV* del rettangolo, gli rimarranno ſolamente gli eccеſſi *MN*, *VX* di quella ſua velocità ſopra i gradi *GN*, *TX*, che all'oppoſto gli vengono impreſſi; e finalmente nel tempo *AH* non gli rimarrà velocità alcuna per ſalire, eſſendo tutta ribattuta dalla velocità *HK* eguale alla detta *LA*, onde nel momento *H* finirà la ſalità del mobile, e quindi in poi comincierà a diſcendere, perchè la velocità *PZ* impreſſagli dalla gravità nel tempo *AP*, ſupera la velocità *PQ*, eguale ad *LA*, impreſſagli dal proiciente; onde con l'eccеſſo *QZ* ſi riſpinge abbaſſo, e ſimilmente nel tempo *AR* con l'eccеſſo *ST*; onde ſi va accelerando nel cadere per il tempo *KS*, eguale ad *HR*, ſecondo il piano delle velocità *KST*.

I. Onde primieramente è chiaro, che nella ſalita di queſto moto ritardato il piano delle velocità è il triangolo *ALK*, perchè ne' tempi *LM*, *LV* eguali a' tempi *AG*, *AT*, eſercita le velocità *MN*, *VX*, ſiccome viceverſa il piano delle velocità nel diſcendere, e l' altro triangolo *KST*.

II. Secondo: che lo ſpazio *AB*, a cui può ſalire un projetto, è la metà dello ſpazio *AC*, che farebbe con moto equabile, ſe non fuſſe grave, nel tempo della ſalita *AH*, perchè gli ſpazi ſono come i piani delle velocità, e però come il triangolo *ALK* al rettangolo *ALKH*, il quale ſarebbe il piano del moto equabile.

III.

III. Terzo: che lo ſpazio *AB* a cui può ſalire il projetto, è lo ſteſſo, che quello, per cui cadendo naturalmente nel medeſimo tempo *AH*, ſi ſarebbe acquiſtata la velocità *HK*, eguale all' impreſſa *LA*, onde vicendevolmente qualunque grave cadendo per uno ſpazio *BA* ſi acquiſta, la ſteſſa velocità, con cui ſe foſſe per la ſteſſa direzione rimeſſo in alto, ritornerebbe alla medeſima altezza nello ſteſſo tempo.

IV. Quarto: che ſiccome gli ſpazj fatti cadendo, ſono in duplicata ragione de' tempi ſcorſi dal principio del moto *AG*, *AT*, *AH*, viceverſa gli ſpazj, che reſtano a ſcorrerſi nel ſalire, ſono in duplicata ragione de' tempi computati, dal fine del moto *HA*, *HG*, *HT*, mentre que' primi corriſpondono a' triangoli *ANG*, *ATX*, *AHK*, e queſti ultimi ſpazi del moto ritardato, corriſpondono a' triangoli *ALK*, *NMK*, *XVK*.

V. Quinto: che gli ſpazj fatti in tempi eguali, ſiccome nella caduta ſono nella progreſſione de' numeri diſpari 1. 3. 5. 7. &c. computati dal principio del moto, così nella ſalita ſono nella ſteſſa progreſſione, computandogli dal fine di eſſa ſalita.

VI. Seſto: la ſcala delle velocità del moto ritardato è la ſteſſa Parabola *EFAH*, che ſerve pel moto accelerato, ma però principiando non dal vertice *E*, ma dalla baſe *AH*, e quindi andando verſo la cima.

VII. Settimo: la ſcala de' tempi nel moto ritardato è il trilineo Parabolico *AFEB*, quando nel moto accelerato è la medeſima Parabola *AEH*, eſſendo i tempi proporzionali alle velocità; Imperocchè eſſendo il quadrato *AH* al quadrato *FO*,

co-

come il triangolo *ALK*, al triangolo ſimile *NMK*, o come *HE* ad *EO*, ſarà per converſione di ragione il triangolo *ALK* al trapezio *ALNM* (che ſono i piani delle velocità corriſpondenti a i tempi della ſalita *LK*, *LM*, ovvero *BE*, *DF*) così *EH*, ad *OH*, cioè lo ſpazio *BA* allo ſpazio *AD*, i quali ſono fatti ne' tempi *BE*, *DF*, eguali ad *LK*, *LM*, e però *AFEB* è la ſcala de' tempi.

CAPITOLO VII.

Del Moto compoſto dell' equabile, e dell' accelerato.

PROPOSIZIONE XXXV.

Tavola XIV. Fig. 122. 123.

Movendoſi il mobile A *con moto compoſto dell' equabile ſecondo la direzione* AD, *con tale velocità, quale ſi ſarebbe acquiſtata cadendo dall' altezza* SA, *e del moto accelerato ſecondo la direzione de' gravi* AG, *deſcriverà una Parabola* ACB *le cui ordinate* FC, GB, *ſieno parallele alla direzione* AD, *ed il cui diametro ſarà la direzione de' gravi* AG, *ed il lato retto ſarà quadruplo dell' altezza* SA, *la quale ſi chiamerà ſublimità della Parabola.*

INtendaſi un cannello *AG* elevato perpendicolarmente all' orizzonte, il quale ſia moſſo equabilmente per la direzione *AD* colla velocità medeſima, che può produrſi dalla caduta *SA* di un grave, e ſi mantenga il cannello ſempre equidiſtante a ſe ſteſſo, ma nel medeſimo tempo ſi laſci

laſci cadere la palla *A* dentro al cannello; Quando adunque il cannello ſarà nel ſito *EH*, ſia diſceſa la palla dentro il medeſimo, per lo ſpazio *EC*, e quando giungerà il cannello in *DB*, abbia diſceſo la palla tutto lo ſpazio *DB*, ſarà dunque lo ſpazio *EC* allo ſpezio *DB* come il quadrato del tempo impiegato nel diſcendere col moto accelerato per l'altezza *EC*, al quadrato del tempo impiegato nello ſcorrere l'altezza *DB*; ma il tempo della diſceſa *EC* è lo ſteſſo col tempo in cui viene trasferito equabilmente il cannello da *A* in *E*, ed il tempo della caduta *DB* è lo ſteſſo, che quello in cui è trasferito il cannello da *A* in *D*, i quali tempi ſono come gli ſpazj del moto equabile, cioè come *AE* ad *AD*, dunque la *EC* alla *DB*, è come il quadrato di *AE* al quadrato di *AD*, oppure condotte le *CF*, *BG* parallele alla direzione *AD*, ſarà *AF* ad *AG*, come il quadrato dell'ordinata *FC* al quadrato dell'ordinata *GB*; ma queſta è la proprietà eſſenziale della Parabola, dunque col moto equabile del cannello compoſto, e col moto accellerato della gravità della palla, ſi deſcrive la curva Parabolica *ACB*, e perchè la velocità del moto equabile è eguale a quella, che ſi acquiſterebbe la palla, cadendo dalla ſublimità *SA*, con cui ſi farebbe equabilmente nello ſteſſo tempo della caduta uno ſpazio doppio di *SA*: dunque poſta *AF*, eguale ad *SA*, ed ordinata *FC* eſſendo ſcorſa nello ſteſſo tempo con moto accelerato la *AF*, e con moto equabile la *FC* con quella ſteſſa velocità, che ſi è acquiſtata la palla nella caduta *AF*, riuſcirà la ordinata *FC* dupla di *AF*, ma il lato retto della Parabola ſta all'ordinata *FC*, come la

me-

medeſima *FC* alla *AF*, eſſendo il quadrato di *FC* eguale al rettangolo di *AF* nel lato retto, dunque eſſo lato retto è duplo di *FC*, e conſeguentemente quadruplo di *AF*. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se dunque con la mano, o con la Baleſtra, o con altri ſtrumenti, quali ſono l' Archibuſo, il Mortaro, il Cannone, viene gettata una pietra, una palla, una ſaetta, e qualunque altro proietto, la via che deſcrive il mobile ſeparato che ſia dallo ſtrumento, il quale per la direzione *AD*, lo incammina, ſarà la curva Parabolica *ACB*, preſcindendo dalla reſiſtenza dell' aria, mercecchè l' impeto impreſſo al mobile per la direzione *AD*, lo porterebbe equabilmente di ſua natura per la retta *AD*, ma intanto la gravità indirizzandolo con moto accelerato verſo il centro de' gravi, lo diſtorna dalla direzione *AD*, e l' obbliga a traſportarſi con moto compoſto per la curva *ACB* ſopra deſcritta.

II. Lo ſteſſo diceſi dell' acqua, o altri liquori, che eſcono da' vaſi per un tubo, il cui foro non ſia parallelo all' orizzonte, ma perpendicolare, o inclinato ad eſſo, ſecondo la direzione di eſſo tubo, come nelle fontane ſi oſſerva, nelle quali movendoſi l' acqua con moto compoſto dell' equabile, ſecondo la direzione del tubo per cui eſce, colla velocità impreſſali dalla preſſione del liquore, che vi ſtà ſopra, e del moto accelerato dalla propria gravità, ſempre deſcrive una Parabola, la cui ſublimità è l' altezza dell' acqua racchiuſa nel ſuo conſervatorio, da cui eſſendo caduta l' acqua, ſi è acquiſtata la velocità laterale, con cui eſce dal cannello.

III.

III. La direzione, per cui è mandato un projetto, ſarà ſempre tangente della curva Parabolica da eſſo deſcritta, eſſendo parallela alle ordinate di eſſa.

IV. Generalmente in qualunque Ipoteſi della gravità, quella ſteſſa curva, che ſerve per la ſcala de' tempi del moto accelerato, ſarà la via de' proietti, perchè eſſendo il tempo della caduta AF al tempo della caduta AG, come FC a GB, così, eſſendo ancora equabilmente fatto lo ſpazio FC, e lo ſpazio BG, colla velocità impreſſa per la direzione AD, il tempo per FC al tempo per GB è nella proporzione di detti ſpazj, dunque in quali tempi ſi paſſano equabilmente gli ſpazi AE, AD eguali agli detti FC, GB ſi paſſano ancora con moto accelerato gli ſpazj EC, DB, ovvero AF, AG; onde la via del moto compoſto è la curva ACB ſcala de' tempi del moto accelerato.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Secondo la data direzione AD *tirando un mobile con tale velocità, quale ſi ſarebbe acquiſtata da un grave, cadendo per l'altezza* SA, *fatto il mezzo cerchio* SMA, *il quale ſega la direzione* AD *nel punto* M, *e tirata la orizzontale* MT *prolungata altrettanto in* BM: *dico, che la Parabola deſcritta dal proietto col ſuo ſublime punto* B *toccherà l'orizzontale* TMB, *e ſi ſtenderà nell'orizzonte all'ampiezza della baſe* AH, *quadrupla ai eſſa* BM. Fig. 124.

IMperocchè condotta la BG parallela ad AM, e tirata la verticale DBR per il punto B; eſſen-

ſendo BG, dupla di AM come BT è dupla di TM, ſarà il quadrato BG quadruplo del quadrato AM, ma queſto è eguale al rettangolo SAT, ovvero SAG, per eſſere AM media proporzionale fra il diametro SA, e la porzione AT eguale ad AG, come TM eguaglia MB, dunque il quadrato BG, eſſendo quadruplo del rettangolo SAG, ſarà BG l'ordinata d'una Parabola, il cui diametro AG, ed il lato retto quadruplo di AS. Ma tale Parabola appunto è quella, che deſcrive il proietto quando è mandato per la direzione AD, dalla velocità acquiſtata dal grave per la caduta della ſublimità SA, dunque tale Parabola paſſa per lo punto B, e la BR parallela ad AG, è un altro ſuo diametro, anzi l'aſse, che ſega per mezzo perpendicolarmente l'ordinata HA orizzontale parallela a TB, la quale ſarà tangente di eſsa curva, per eſsere TA eguale ad AG: ma MT è la metà di TB, dunque l'ampiezza HA orizzontale, che è dupla di AR, è quadrupla della TM. Il che &c.

COROLLARI.

Fig. 125. I. Di tutte le proiezioni, che ſi poſsono fare con lo ſteſso impeto, quale ſi acquiſterebbe un grave cadendo dalla ſublimità SA, la maſſima di tutte, cioè quella, che coll'ampiezza ſua ſtendeſi maggiormente nell'orizzonte, è quella, che ſi fa per la direzione AM, la quale faccia un'angolo ſemiretto colla ſublimità SA, cioè quando il punto M cada nel mezzo dell'arco SMA, perchè allora la MT è la maſſima di tutte le ordinate del ſemicircolo, perchè paſsa per lo centro di eſso, onde la AH quadrupla di TM rieſce la maggiore

re, che poſſa eſſere, mentre le altre ampiezze orizzontali dipendenti da un altra direzione, la quale ſegaſſe il ſemicircolo in altro punto diverſo da quel di mezzo, ſarebbe quadrupla di un' altra ordinata minore tirata nel medeſimo ſemicircolo.

II. Ma ſe due tiri ſaranno fatti con due direzioni *AL*, *AE* egualmente diſtanti dalla retta *AM*, che faceſſe l' angolo ſemiretto *SAM*, concorreranno ambidue le Parabole nate da tali direzioni, cioè le curve *AGI*, *AKI* nello ſteſſo punto *I* dell' orizzonte, divenendo l' ampiezza di ciaſcun tiro quadrupla delle ordinate *LF*, *NE*, che ſono eguali tirate da' concorſi di quelle direzioni coll' arco del ſemicircolo, perchè eſſendo queſte egualmente lontane dalla *AM*, che fa l' angolo ſemiretto, tagliano eguali archi *ML*, *ME*, e però ſono eguali *SL*, *AE*: onde quelle ordinate *FL*, *EN*, ſono pure eguali, ed il loro quadruplo *AI* deve eſſere lo ſteſſo; ſicchè volendo mandar la palla al punto *I* tanto è incamminarla per la direzione *AL*, quanto per la *AE* colla ſteſſa velocità, rieſcendo queſto ſolo divario, che per abbattere un muro verticale ſarà più opportuno il prevalerſi del tiro baſſo, che diceſi di volata *AKI*, ma volendo sfondare il piano orizzontale, farà più colpo il tiro ſuperiore *AGI*.

III. Queſte tre coſe: cioè la ſublimità *SA*, donde il peſo acquiſterebbe cadendo la medeſima velocità, la direzione *AD*, è la lunghezza, o ampiezza del tiro *AH*, date due qualunque di eſſe, è coſa faciliſſima il determinare la terza ſecondo i premeſſi principj Fig. 124.

IV. Per fare varii tiri alla ſteſſa ampiezza, tanto

to minor impeto, e forza di polvere ſi ricerca, quanto la direzione ſi avvicina più all' angolo ſemiretto colla ſublimità *S A*, di manierachè minimo è l' impeto, che ſi richiede facendola al detto angolo ſemiretto.

V. Da un ſolo tiro di Mortaro, o di Cannone ritrovando l' ampiezza della Parabola deſcritta dal mobile, facilmente potrà trovarſi la lunghezza, a cui ſi porterebbe il tiro in qualunque altra elevazione del pezzo, e viceverſa può trovarſi l' elevazione, che ſarebbe neceſſaria per fare, che giunga il tiro ad un' ampiezza determinata.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Fig. 126. 127. *Dovendoſi tirare un proietto dal luogo* A *al ſito G non poſto nel medeſimo piano orizzontale* A E, *ma ſopra, o ſotto di eſſo con una velocità, quale ſi acquiſterebbe un grave cadendo dalla ſublimità* S A; *ſi cerca la direzione del tiro.*

COngiunta *A G*, e prolungata la verticale *S A* al di ſotto verſo *F*, ſi faccia ſopra la retta *S A* una porzione di cerchio capace dell' angolo *G A F*, e poſta *A H* eguale ad un quarto della *A G* ſi alzi la verticale *H M*. Se queſta non concorre coll' arco circolare *A M S*, non ſarà ſufficiente la detta velocità per condurre il proietto da *A* in *G*, ma ci vorrà un' altezza maggiore: che ſe concorre in eſſo nel punto *M* ſi congiunga *A M*, e facciaſi il tiro ſecondo la ſteſſa direzione *A M*: dico, che anderà a ferire il proietto nel punto deſtinato *G*.

Imperocchè, tirata *M N* parallela ad *A G*, e diviſa per mezzo *A G* in *I* ſi alzi la verticale *I C* concor-

corrente con essa *NM* in *C*, e congiunta *CHB*, che sarà parallela ad *AM* (perchè essendo *AH*, eguale ad *HI*, ancora *NM* è eguale ad *MC*, per esser parallele le verticali *AN*, *MH*, *IC*, e però *AI* eguale ad *NC* nel parallelogrammo *ANCI*, sarà *MC* eguale ad *AH*, per esser ambedue la metà delle rette eguali *NC*, *AI*) e condotta *GF*, parimente parallela alla stessa *AM*, se si congiunge *SM*, sarà per la costruzione l'angolo *SMA* eguale all'angolo *GAF*, ovvero all'angolo *MNA*, dunque essendo ne' triangoli *SMA*, *MNA* gli detti angoli eguali, e l'angolo *MAN* comune a tutti due, saranno essi triangoli simili. Dunque *SA*, ad *AM* stà come *AM* ad *AN*, ovvero all'eguale *AB*, siccome *MN* eguaglia *MC*, dunque il rettangolo *SAB* eguaglia il quadrato *AM*, ovvero l'eguale quadrato *BH*, e presi i quadrupli sarà il rettangolo della quadrupla *AS* nella *AB*, eguale al quadrato *BC*, il quale è quadruplo del quadrato *BH*, per essere quella dupla di questa, ed essendo ancora la *GF* dupla di *BC*, siccome è quadrupla di *BH*, essendo *FA* quadrupla di *AB*, e la *GA* di *AH*, sarà il quadrato *GF* pure eguale al rettangolo della quadrupla di *AS* nella retta *AF*, onde è manifesto, che il punto *G* sarà nella stessa Parabola descritta per gli punti *A*, *C*, *G*, il cui diametro sia *AF*, ed il lato retto sia quadruplo della sublimità *SA*, però fatto il tiro colla data velocità secondo la direzione *AM*, dovrà andare il projetto a battere nel punto *G*. Il che &c.

COROLLARI.

I. E' manifesto, essere la *NC* tangente della Pa-

rabola nel punto *C*, per eſſere *AB* eguale ad *AN*.

II. Se la retta *HM* ſega in due punti *M*, *m*, l'arco *AMmS*, ſi potrà fare il tiro anche colla direzione *Am*, deſcrivendo la Parabola ſuperiore. Ma
Fig. 128. ſe *HM* tocca l'arco ſuddetto nel ſuo punto di mezzo, ſarà poſſibile una Parabola ſola, e queſta manderà il tiro ſul piano *AG* più lontano, che ſia poſſibile, perchè l'ordinata *MN* riuſcirà la maſſima di tutte, ed eſſendo *AG* quadrupla di eſſa, ſiccome è quadrupla di *AH* eguale ad *NM*, il luogo *G*, dove cade il projetto, ſarà lontaniſſimo dal punto *A* d'onde ſi fa il tiro.

III. Dunque il più ampio tiro, che poſſa farſi ſul piano *AG*, ſarà quello, in cui la direzione *AM* ſega per mezzo l'angolo *SAG* contenuto da detto piano *AG*, e dalla verticale *SA*, perchè eſſendo *HM* parallela ad *AS*, e toccando l'arco *AMS* nel punto di mezzo *M*, gli angoli *MAH*, *MAS* ſaranno eguali, eſſendo *MAH* eguale all'angolo *ASM*: onde eſſendo gli archi *AM*, *SM* eguali, biſogna che l'angolo *MAH* eguagli l'angolo *MAS*, e qualunque altro tiro ſarà di maggiore ampiezza, ſecondo che più accoſterà la ſua direzione a quella *AM*, che taglia per mezzo l'angolo *SAG*.

CAPITOLO VIII.

Della Percoſſa.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

La percoſſa, che fa un corpo duro ſopra la ſuperficie ferma di un piano, creſce in ragione compoſta

posta del peso del corpo mosso, e della velocità con cui urta, e del seno dell' incidenza, cioè del seno di quell' angolo contenuto dalla direzione del mobile sopra la superficie del piano percosso nel punto di esso contatto.

CHe la percossa cresca a misura, che sia maggiore il peso, e la velocità del mobile, è manifesto, perchè in tale ragione appunto cresce il momento di un corpo, cioè la forza con cui si muove, e da cui senza dubbio dipende l' energìa della percossa in pari circostanze, cioè secondo la medesima direzione la forza è maggiore, sì per il maggior peso del mobile, come ancora per la maggiore velocità, con cui sia spinto.

Che poi cresca ancora questa forza della percossa, secondo che cresce il seno dell' incidenza, Fig. 129. si dimostra così. Muovasi il corpo *A* contro il piano fermo, e stabile *EF* colla direzione inclinata *AB*, e condotta sopra esso piano la perpendicolare *AC*, congiunta *BC* si compisca il rettangolo *BCAD*: il moto per *AB* si può risolvere ne' due moti collaterali *AC*, *AD*, de' quali è composto. Ma essendo il moto *AD* parallelo al piano *BC*, non gli si oppone punto, e non può offenderlo quando ancora fosse di vetro, dunque il moto per *AB* non ha forza di percuotere il piano *BC* secondo il moto collaterale *AD*, ma solamente secondo il perpendicolare *AC*; ed è *AC* il seno dell' angolo dell' incidenza *ABC*, computando *AB* per il raggio, dunque cresce l' energìa della percossa, generalmente parlando, in ragione composta del peso, e della velocità del mobile, e del seno dell' incidenza. Il che &c.

COROLLARI.

I. Poſſono farſi eguali percoſſe ſopra una ſuperficie ſtabile, e ferma, tanto da un corpo minimo, come da un altro grandiſſimo, qualunque volta, o la velocità, o il ſeno dell'incidenza compenſi reciprocamente in quello, ciò che ha queſti di eccesſo nel peſo: come per eſempio, ſtante la ſteſſa direzione, tanta percoſſa farà ſopra d'un piano il martello d'una libbra moſſo con dieci gradi di velocità, quanto ne farebbe un martello di dieci libre moſſo colla velocità d'un grado ſolo, ed ancora ſe amendue ſi moveſſero con pari grado di velocità, purchè il ſeno dell' incidenza del minore foſſe dieci volte maggiore del ſeno d' incidenza nell' altro, ne ſeguirebbe egual colpo, ſiccome ancora in due corpi di egual peſo, ſe la velocità del primo foſſe tanto maggiore, della velocità del ſecondo, quanto il ſeno d'incidenza di queſto è maggiore del ſeno d' incidenza di quello, ne ſeguirebbe eguale percoſſa, perchè la ragione compoſta di due reciproche eguali, fa ſempre la ragione di egualità, come in due rettangoli quando la ragione del primo lato dell' uno, al primo lato dell' altro è eguale alla ragione del ſecondo lato dell' ultimo, al ſecondo lato del primo, eſſi rettangoli ſono eguali.

II. Ancora ne riſulterebbero eguali percoſſe per la medeſima ragione, quando i ſeni dell' incidenza foſſero reciprochi a' momenti de' mobili, cioè a' prodotti del peſo di ciaſcheduno nella ſua velocità, oppure quando i loro peſi foſſero reciprochi a i prodotti della velocità di ciaſcuno nel

ſuo

ſuo ſeno d' incidenza, oppure finalmente quando le velocità de' mobili foſſero reciproche a' prodotti del peſo di ciaſcuno nel ſuo ſeno d' incidenza.

III. E la maſſima percoſſa di un dato peſo, moſſo con una data velocità, è quando urta con direzione perpendicolare alla ſuperficie del corpo percoſſo, eſſendo il maſſimo ſeno dell' incidenza quello, che corriſponde all' angolo retto.

PROPOSIZIONE XXXIX.

Le percoſſe fatte da una maſſa fluida, come acqua, o aria ſpinta col vento &c. contro varie ſuperficie piane, ſono ſempre in una direzione perpendicolare alla medeſima ſuperficie, e creſce la loro forza in ragione compoſta della quantità di eſſe ſuperficie percoſſe, e della duplicata ragione delle velocità, e di quella de' quadrati de' ſeni d' incidenza.

IMperocchè può conſiderarſi un fluido come una congerie di tante minutiſſime sferette, che vengono ad urtare ſecondo la direzione *ABF* della corrente del fluido, contro la ſuperficie *DE*, e ciaſcuna di queſte sferette urta nel piano ſecondo la direzione della linea *BC*, congiungente il centro di eſſe col punto del contatto, la qual linea è ſempre perpendicolare alla ſuperficie percoſſa, dunque per quanto ſia inclinato il piano, che riceve il colpo dal fluido, ſempre reſta ſpinto ſecondo la direzione perpendicolare, non ſecondo l' inclinata, e così benchè una vela riceva il vento obliquamente, ed il timone non ſi ponga perpendicolare al corſo dell' acqua, ſempre il moto, che

Tavola XV. Fig. 130.

ne deriva ſarà per ſe ſteſſo perpendicolare alla vela, o al timone ſuddetto.

Oltre a cio, ſe l' eſtreme linee parallele del fluido ſiano per eſempio *AB*, *EF*, e col raggio
Fig. 131. *FB* ſi deſcriva l'arco *BH*, condotto *HI* ſeno dell' angolo d'incidenza *EFB*, ed anche tirata la *BG* perpendicolare alla *EF*, ſarà la *BG* eguale ad *HI*, ma la *BG* è la miſura della quantità del fluido compreſo tra l' eſtreme linee parallele del fluido *EF*, *AB*, la quale quantità è quella, che urta contro queſta traccia *BF* del piano percoſſo, e ne miſura la larghezza *BG*: dunque la percoſſa, per conto della materia ſpinta ſopra queſta traccia, miſuraſi da eſſa *BG*, e così ancora dall' egual ſeno *HI*, ma per conto dell' obliqua incidenza ſi miſura altresì dal medeſimo ſeno *HI*, per l' antecedente propoſizione, dunque ſarà miſuratata dal quadrato del ſeno dell' incidenza, in parità dell' altre circoſtanze.

Nè vi ha dubbio, che quanto maggiore è la ſuperficie percoſſa tanto più creſca la maſſa del fluido, che vi dà ſopra, e ſi fa maggiore l'impreſſione fatta in eſſa, dunque ancora per queſto capo creſce la forza del colpo.

E perchè quanto maggiore è la velocità del fluido, tanto maggior copia di eſſo in un dato tempo ſucceſſivamente ſi applica ad urtare il piano oppoſto al ſuo corſo, quindi è, che la percoſſa creſce ancora in duplicata ragione della velocità, e però la propoſizione reſta dimoſtrata in tutte le ſue parti, cioè, che quantunque obliqua ſia la direzione del fluido, percuote perpendicolarmente la ſuperficie oppoſta, e che la forza della percoſſa

coſſa creſce in ragione compoſta della quantità di eſſa ſuperficie, della dnplicata ragione delle velocità, e dei quadrati de' ſeni dell' incidenza.

PROPOSIZIONE XXXX.

Qualunque vaſtiſſimo corpo ſolido A, *purchè ſia penſile, o galleggiante, o in qualſivoglia maniera equilibrato al moto, potrà eſſer moſſo dalla ſua quiete da qualunque minimo corpo ſolido B, che vi urti dentro con qualunque velocità FD.*

PIgliſi un corpo *C* eguale ad *A*, e ſia come *C* a *B*, così la velocità *FD* alla velocità *E*, dunque ſarà eguale il momento del corpo *B* moſſo colla velocità *FD*, e del corpo *C* moſſo colla velocità *E*; onde tanto quello, che queſto farà eguale percoſſa in *A* (per il Coroll. della Propoſiz. 38.): ma è certo, che il corpo *C*, urtando colla velocità *E* nel corpo quieto *A* eguale a lui, potrà muoverlo, dunque ancora il corpo minimo *B*, moſſo colla velocità *FD*, dovrà muovere eſſo corpo *A* dalla quiete. Fig. 132

PROPOSIZIONE XXXXI.

Poſte le ſteſſe coſe dico, che il corpo B *non comunicherà al percoſſo* A *tutta la ſua velocità* FD, *ma ſolamente quella parte* FG, *la quale all' intera* FD, *ſtia come eſſo corpo* B *alla ſomma d' ambidue i corpi* B, *ed* A, *ſupponendo però eſſi corpi eſſer duri, non dotati di forza elaſtica.*

IMperocchè applicandoſi la velocità *FD* del corpo *B* ad ambidue i corpi *B*, ed *A*, biſogna, che il momento del ſolo corpo *B*, moſſo prima colla ve-

velocità FD, ſia eguale al momento, con cui inſieme ſi muoveranno i due corpi B, ed A, dunque biſogna, che come B alla ſomma d' ambidue B, ed A, così ſtia la velocità di queſti due moſſi, alla velocità del primo, e però conviene, che la velocità di queſti due ſia FG, la quale ſtia alla prima velocità FD, come il percuziente B alla ſomma del percutiente, e del percoſſo, che vanno inſieme B ed A. Il che &c.

PROPOSIZIONE XXXXII.

Movendoſi, due corpi A *e* B *verſo la medeſima parte, ſe hanno la ſteſſa velocità mai ſi percuoteranno, e molto meno quando l' antecedente aveſſe maggiore velocità del ſuſſeguente; Ma ſe la velocità del conſeguente corpo* A *ſia maggiore di quella dell' antecedente* B, *quello percuoterà queſto, coll' eccesſo della velocità ſua ſopra quella dell' altro.*

Fig. 133. IMperocchè ſe i corpi ſono egualmente veloci, quando abbiano qualche diſtanza, manterranno ſempre la medeſima, o ſe ſi toccano, anderanno ſempre contigui ſenza impreſſione di colpo veruno; Che ſe foſſe poi maggiore la velocità dell' antecedente B, di quella del conſeguente A, ſempre maggiormente ſi dilaterebbe la loro diſtanza in queſti moti, creſcendo lo ſpazio fatto dal precedente, ſopra il fatto dal ſuſſeguente nel medeſimo tempo, onde molto meno potranno mai percuoterſi: ma eſſendo maggiore la velocità del corpo di ſotto A, che quella dell' antecedente B, ſi ſuppongano eſſere tali velocità come AD a BD, dunque nello ſteſſo tempo converranno in D ambi-

bidue gli corpi, facendo gli ſpazi *AD*, *BD* proporzionali alle loro velocità, onde al corpo *B* riſulterà la percoſſa del conſeguente *A*, ſecondo la velocità *AB*, che è l' eccesſo di *AD* ſopra *BD*; imperocchè colla parte di velocità *BD*, non può il corpo *A* percuotere *B*, eſſendo comune tale velocità allo ſteſſo corpo *B*, con cui sfugge quella parte di colpo, onde reſta che ſolamente il corpo *B* ſenta l' urto dal corpo *A* di quell' eccesſo di velocità *AB*. Il che &c.

COROLLARI.

I. Quindi prevedendo noi il colpo di qualche corpo, che ci venga addoſſo, ſe non ſi può del tutto ſchivare, gioverà il muoverſi quanto più velocemente ſi poſſa verſo la medeſima parte, che così tanto minore riſulterà la forza del colpo fatto dal percuziente.

II. Il moto comune non altera i movimenti proprj de' corpi, e però la ſteſſa percoſſa riſulta, percuotendoſi due corpi ſul tavolato di una nave quando ſtà ferma, che quando ſia in qualunque moto veloce, il qual moto ſarebbe egualmente partecipato dal corpo percuziente, e dal percoſſo.

PROPOSIZIONE XXXXIII.

Vicevcrſa, incontrandoſi i corpi colle velocità AD, BD, *faranno nel punto* D *tale percoſsa, come ſe uno di loro urtaſse nell' altro fermo, e ſtabile, con l' aggregato d' ambe le velocità, cioè con l' intiera* AB.

PEr dimoſtrare ciò più facilmente, ſi ſuppongano i corpi *A*, *B* incontrarſi aſſieme ſul tavolato Fig. 134.

to d'una barca, la quale frattanto ſi muova colla velocità *D B* al contrario verſo *E*. Chi vedrà queſto movimento nello ſtare ſopra la ripa *HE*, ſenza por mente al moto del Navicello, ma tenendo l' occhio ſolamente alle palle mobili *A, B*, vedrà che la palla *A* nello ſpazio reale del Mondo ſi muoverà colla velocità *AB*, perchè oltre la propria velocità *AD*, partecipa ancora quella della barca *DB*, che ſi muove per la ſteſſa parte, onde portandoſi dal punto *A*, che corriſpondeva al punto *H* della ripa, al punto *D* ſul tavolato della navicella, che era dirimpetto al punto *G* della ripa, coll' altra velocità *DB*, che partecipa dalla nave, arriverà a corriſpondere al punto *F* della ripa, che prima era dirimpetto al punto *B* del navicello: onde eſſendo realmente ſcorſo nello ſpazio mondano il mobile *A* uno ſpazio eguale ad *HF*, cioè ad *AB*: laddove il mobile *B*, benchè s' incontri verſo *A* colla velocità *BD* ſopra il piano della nave, e nello ſteſſo tempo ſia tirato colla velocità *DB* eguale, per cui ſi muove la navicella, rimarrà ſempre dirimpetto al punto fiſſo *F* della ripa in tutto il tempo di queſti moti, onde non ſi vedrà eſſer moſſo nello ſpazio mondano, che occupava, dunque il corpo *A* percuoterà con tutta la velocità *AB*, il corpo *B* in quiete: ma la ſteſſa percoſſa accade nella nave ferma, che in quella, la quale ſi muove, come nell' ultimo Coroll. della precedente, dunque il colpo fatto da' corpi *A, B*, che ſi incontrino in *D* colle velocità *AD, BD* è il medeſimo, che riſulterebbe ſe uno di eſſi con l' aggregato di ambe le velocità, veniſſe ad urtar l' altro. Il che &c.

Co-

COROLLARIO.

Quando un mobile veniſſe ad urtarci, non torna il conto muoverſi contro d' eſſo, perchè ſi accreſcerebbe la forza della percoſſa di tanta velocità, quanta è quella, con cui l' incontriamo,

PROPOSIZIONE XXXXIV.

Di due corpi duri A, B *eſsendo il centro di gravita* C, *ſe s' incontrano colle velocità* AC, BC, *di eſsi corpi* A, *e* B, *dovrà fermarſi e l' uno, e l' altro in eſso punto* C *del mutuo concorſo; ma ſe fuſſero detti corpi ancora elaſtici, dovrà ciaſcuno ritornare indietro colla ſua primierà velocità.*

IMperocchè eſſendo *C* il centro di gravità de' corpi, ſarà *A* a *B*, come *BC* a *CA*, cioè come la velocità di queſto alla velocità di quello, dunque i loro momenti, con cui s' incontrano in *C* ſono eguali, ed eſſendo pure direttamente oppoſti, niuno di eſſi può prevalere all' altro, onde (per l' Aſſ. 4.) ſi elideranno vicendevolmente, riducendoſi i detti corpi duri alla quiete, purchè non foſſero da qualche altra cagione di nuovo eccitati al moto: ma ſe ciaſcuno di eſſi aveſſe la forza elaſtica, non potrà eſſere ciaſcuna di eſſe compreſsa con egual momento da una, e dall' altra banda, ma a guiſa di molla reſtituendoſi con egual forza, verrà reſpinto l' uno, e l' altro mobile per la ſteſsa direzione, e colla medeſima loro velocità all' oppoſte parti, di manierachè, ſiccome con egual momento ſi erano incontrati, ſi diſgiungeranno altresì uno dall' altro con egual momento. Il che &c. Fig. 135.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXXV.

Fig: 134. 136. 137. 139. *Movendosi due corpi duri, ma non elastici colle velocità* AD, BD, *o dirette, ovvero a parti opposte, trovato il loro centro di gravità* C, *dico, che dopo il concorso si muoveranno ambidue colla velocità* CD *verso quella banda, che dimostra l' ordine delle lettere* CB:

SI faccia questo moto sul tavolato di una Barca, la quale frattanto si muova verso *C*, colla velocità *DC*; chi stara sulla ripa *EH*, e riguarderà il moto di questi mobili, vedrà muoversi il corpo *A* nello spazio mondano colla velocità *AC*, ed il corpo *B* colla velocità *BC*, perchè il moto della barca cospirando col moto dell'uno, ed opponendosi al moto dell' altro (anzi al moto di tutti due ne i due ultimi capi) si accresce la velocità di quello, che va per la stessa banda, così diminuisce la velocità di questo, quando si rivolge alla banda opposta, dunque saremo nel caso dell' antecedente proposizione, in cui convengono i corpi nel loro centro di gravità *C* dentro lo spazio mondano, in cui per tanto debbono ambidue fermarsi, ma la barca col suo moto gli trasferisce da *D* in *C*, dunque per mantenersi nello stesso spazio mondano, bisogna che l'uno, e l'altro sul piano della nave si muova all' opposto con altrettanta velocità *CD*: ma ciò, che accade nella barca mossa, accaderebbe ancora stando essa ferma, o in un altro piano mobile facendosi i medesimi moti (per il Coroll. 3. Prop. 42.) dunque è vero ciò, che in questa proposizione doveasi dimostrare.

Co-

COROLLARI.

I. Se uno de' corpi per esempio *B* fosse quieto, la sua velocità *BD* sarebbe nulla, e cadendo il punto *D* in *B*, si muoverebbero ambi i corpi dopo il colpo colla velocità *CD*, cioè *CB*, la quale stà a tutta la velocità *AD* del mobile *A*, come il corpo percuziente *A*, alla somma di ambidue *A*, e *B*, perchè essendo *B* ad *A*, come *AC* a *CB*, componendo stà la somma di ambidue *A*, e *B* ad *A*, come *AB* a *BC*. Fig.138.

II. Ma cadendo il punto *D* nel punto *C*, sarebbe ciò il caso della proposizione 44. onde dopo il concorso si fermerebbero ambidue, diventando nulla la velocità *CD*. Fig.135.

III. Lo stesso segue se il corpo *A* si movesse contro un corpo *B* immensamente maggiore, e quieto, o in un ostacolo fermo urtasse, perchè il loro centro *C*, ed il punto *D*, caderebbero nello stesso punto *B*, e però si fermerebbe esso corpo duro *A* dopo la percossa, essendo ancora quì la velocità *CD* nulla. Fig.140.

PROPOSIZIONE XXXXVI.

Poste le stesse cose, quando i corpi fossero elastici, Fig.141. 142. 143. 144. 145. 146.
prendendo dall' altra parte CE *eguale a* CD: *dico, che dopo il colpo si muoverà il corpo* A *colla velocità* EA, *ed il corpo* B *colla velocità* EB *secondo l' ordine delle stesse lettere.*

IMperocchè movendosi, come prima, la Nave colla velocità *DC*, ovvero *CE*, che è la stessa, ne seguirà, che il mobile *A* dovrà muoversi nel-

nello ſpazio mondano colla velocità AC, ed il corpo B colla velocità BC, onde con eguali momenti incontrandoſi, ritorneranno indietro (per la Prop. 4.) colle ſteſse loro prime velocità, cioè il corpo A colla velocità CA, e l'altro B colla velocità CB, ma intanto movendoſi la nave colla velocità CE, biſognerà che in ſul tavolato di eſsa i detti corpi ſi muovano colle velocità EA, EB, perchè la ſomma de' moti coſpiranti, e la differenza degli oppoſti riſulterà nello ſpazio mondano quella, che dee eſsere, cioè del muoverſi i mobili dopo il colpo colle velocità ſuddette CA, CB, ma ciò che accade nel navicello moſſo, parimente ſuccederebbe in un piano ſtabile, e fermo, dunque le velocità, colle quali ſi muovono i corpi dopo il loro concorſo, ſaranno le diſopra determinate EA, EB. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se il corpo B ſteſse fermo eſsendo nulla la ſua velocità BD, cade il punto D in B, onde CB eguaglia CD, e però EB è doppia di CB, onde eſsendo AC a CB come B ad A, e componendo AB a CB come la ſomma di A, e B al percuziente A, ſarà la velocità AD, che eguaglia AB alla velocità ED impreſsa al percoſso prima fermo, come la ſomma di A, e B al doppio del percuziente A. Fig. 147. 148.

II. La velocità EA dopo la percoſsa di A al corpo fermo B, ſe A è minore di B, ſarà alla prima ſua velocità AD, come l'eccesso di B ſopra A alla ſomma di A, e B, e muoveraſſi all' indietro, eſsendo AE eguale a CA meno CE, che è lo ſteſ- Fig. 147.

ſo

ſo come CA meno CB, e però come B meno A. Ma ſe A foſse maggiore di B, eſsendo più proſſimo il centro C ad A, che a B, la CE eguale a CB paſserà oltre A, onde la velocità EA dopo la percoſsa, ſarà alla primiera AD, come A manco B alla ſommà di ambedue, eſsendo AE la ſteſsa, che CE manco CA, ovvero CB manco CA, e però eguale ad A manco B, e con queſta velocità EA muoveraſſi verſo la medeſima parte, eſsendo però maggiore la velocità EB del percoſso, che la velocità EA rimaſta nel percuziente, ed eſsendo la velocità EB alla velocità EA, come il doppio del percuziente all' eccesſo del percuziente ſopra il percoſso. Fig. 148.

III. Che ſe i corpi A, e B, fuſsero eguali, cadendo il centro C in mezzo ad AB, e ſtando fermo il corpo B, ſarà CA eguale a CE, eguagliando la CD, che è la ſteſsa di CB; dunque cadendo il punto E in A, la velocità EA ſarà nulla, e la EB eguale ad AD, ſicchè il percuziente reſterà fermo, ed il percoſso prima fermo, riceverà la velocità del percuziente, onde quindi avviene, che urtando una palla nella ſerie di più altre palle eguali ferme, e contigue, dovrà fermarſi eſsa percutiente colle altre proſſime intermedie, e ſolamente muoverſi l'ultima colla ſteſsa velocità, con che la prima percoſse coteſta ſerie. Fig. 149.

IV. Incontrandoſi poi le palle A, B, tra loro eguali con velocità diſuguali AD, BD, ritorneranno indietro, ſe prima ſi opponevano, o anderanno alla medeſima parte, ſe tutte due movevanſi a quel verſo, colle velocità cambiate tra loro, cioè la palla A colla velocità EA, eguale alla velocità BD, Fig. 150. 151.

e la

e la palla *B* colla velocità *EB* eguale alla velocità *AD*, perchè dividendo il centro *C* la distanza *AB* per mezzo, ed essendo ancora *CE*, eguale a *CD*. è manifesto, che resta *EA* eguale a *BD*, e riesce *EB* eguale ad *AD*.

Fig.152 Tavola XVI. Fig.153. V. Essendo disugali le palle *A*, *B*, se la velocità della prima *AD* alla velocità della seconda *BD*, sarà come il doppio di *B* alla differenza di *A*, e *B*, si fermerà dopo il concorso il percuziente *A*, e muoverassi il corpo *B* percosso colla velocità *EB*, la quale starà alla prima *BD*, come la somma di *A*, e *B* alla loro differenza; imperocchè essendo *C* il centro di gravità di tali corpi, e però *A* a *B*, come *CB* a *CA*, posta *CD* eguale a *CA*, sarà *AD* a *BD*, come il doppio di *AC* a *CB* meno *AC*, ovvero nella seconda figura ad *AC* meno *CB*, e però il doppio di *DB* alla differenza de' corpi *B*, ed *A* è come la velocità *AD* alla velocità *BD*, dunque essendo *CE* eguale a *CD*, e però eguale a *CA*, cade il punto *E* in *A*, onde si ferma il corpo *A*, di cui nulla sarebbe la velocità *EA*, e la velocità *EB* del corpo *B* sarà alla velocità *BD*, come la somma di *AC*, e *CB*, alla differenza di *CA*, e *CB*, onde è come la somma di *A*, e *B* alla differenza di essi corpi.

Fig.154. VI. Se il corpo *A* è triplo di *B*, i quali s'incontrino con eguali velocità *AD*, *BD*, dopo la percossa fermerassi il corpo *A*, ed il corpo *B*, tornerà indietro colla velocità *EB* dupla della prima *BD*; imperocchè divisa *AB* in quattro parti, sarà il punto *D* nel mezzo, per essere *AD* eguale a *BD*, ed il punto *C* in mezzo di *AD*, dovendo essere *BC* tripla di *CA*, come il corpo *A* è triplo

di *B*

di *B*, dunque posta *CE* eguale *CD*, caderà il punto *E* in *A*, onde la velocità *EA* sarà nulla, e la velocità *EB*, sarà doppia di *BD*.

VII. Viceversa se il corpo *A* triplo di *B*, stesse fermo, e fosse urtato da *B* colla velocità *BD*, cadendo il punto *D* in *A*, sarà *CD* eguale a *CA*, cioè alla terza parte di *CB*, onde posta *CE* eguale a *CD*, caderà il punto *E* nel mezzo di *AB*, e però dopo la percossa, essi corpi si muoveranno con eguali velocità *EA*, *EB* in parti contrarie. Fig. 155.

VIII. Se il percuziente *A* urtasse nel corpo *B* fermo, ed infinitamente maggiore di *A*, tornerebbe *A* all'indietro colla stessa velocità, con cui si è spinto in esso, perchè i punti *B*, *D*, *C*, saranno nello stesso sito, essendo infinitamente maggiore *B* di *A*: dunque *AC* è infinitamente maggiore di *BC*, e però *BC* è quasi nulla, ed essendo ancora *D* nel punto *B*, essendo nulla la velocità *BD*, facendo *CE* eguale a *CD*, ancora il punto *E* cade nel medesimo sito, dunque la velocità *EA*, con cui deve ritornare indietro il corpo *A*, sarà eguale alla velocità *AD*, con cui percuoterà il corpo *B*, ed esso corpo *B* rimarrà fermo come prima, essendo ancora *EB* infinitamente piccola, e come un nulla. Questo caso accade urtando una palla in qualche rupe, o in un muro stabile, che equivale ad un corpo infinitamente maggiore del percuziente. Fig. 156.

PROPOSIZIONE XXXXVII.

Se il mobile A, *colla velocità* AD, *urta qualunque altro mobile* B, *ovvero* N, *che stava fermo, essendo essi mobili* A, B, N, *come le linee* CA, CB, CN, *posta* CE *eguale a* CA, *e tirata* EL *parallela ad* AD, Fig. 157.

e per lo punto D *descrivendo l' Iperbola* DSV *fra gli Assintoti* EA, EL, *tirando le rette* BS, NV, *parallele all'* AD, *la velocità impressa in* B, *sarà* BS, *e l' impressa nell' altro mobile sarà* NV, *e così da per tutto*.

IMperocchè per la proprietà dell' Iperbola, essendo *BE* ad *EA*, come *AD* a *BS*, ed ancora *NE* ad *EA*, come *AD* ad *NV*, sarà *AD* a *BS*, come la somma di *BC*, e *CA*, che è *BE*, al duplo di *CA*, che è *EA*, ed in conseguenza come la somma de' mobili *A*, *B* al duplo del percuziente *A*: ma (per il Coroll. 3. della Prop. precedente) la velocità del percuziente *AD*, sta alla velocità impressa nel percosso, che era fermo, come la somma di detti mobili al duplo del percuziente, dunque la velocità impressa al percosso *B*, deve essere come *BS*, ed al percosso *N*, come *NV*, essendo *AD* a *BS*, come *BE* ad *EA*, ed *AD* ad *NV*, come *NE* ad *EA*, e così sempre. Il che &c.

COROLLARIO.

Tirando per lo punto *D* la *DK* parallela ad *AE*, segante la *BS* in *F*, e l' *NV* in *G*, il percuziente *A*, dopo la percossa del mobile fermo *N* maggiore di esso, si muoverà al contrario colla velocità *VG*, è dopo la percossa del mobile *B*, minore di *A*, dovrà muoversi verso le medesime parti colla velocità *FS*, essendo tanto *FS*, che *GV* la differenza della prima velocità *AD*, e della velocità impressa agli altri mobili *BS*, *NV* (per il Coroll. 2. della Prop. precedente).

PRO-

PROPOSIZIONE XXXXVIII.

Se un corpo elaſtico A, *colla velocità* AD, *percuoteſſe il corpo fermo* B, *per mezzo d' un altro corpo* N *di mediocre grandezza fra gli due eſtremi, gl' imprimerà maggiore velocità di quella, che gli avrebbe impreſſa, ſe urtava immediatamente in eſſo.* Fig. 158. 159.

IMperocchè deſcritta l' Iperbola come nella precedente, è manifeſto, che ſarà *NV* la velocità impreſſa nel corpo medio *N*, e la velocità *BS* ſarebbe quella, che darebbe immediatamente al corpo *B*: ma poſta *CH* eguale a *CN*, e condotta *HG* parallela ad *NV*, ſe per il punto *V* ſi deſcrive l' altra Iperbola *IVF*, ſegante la *BS* in *F*, il mobile *N* colla velocità *NV* darebbe al corpo *B* la velocità *BF*, la quale è maggiore della *BS* impreſſali immediatamente dal corpo *A*, dunque maggiore è la velocità impreſſa dal corpo percuziente *A* nel corpo fermo *B*, per mezzo d' un altro corpo *N* di mediocre grandezza fra gli eſtremi, che ſe immediatamente lo urtaſſe. Il che &c.

COROLLARI.

I. Interponendoſi a' corpi *A*, e *B* altri intermedii *N*, *O*, *P* &c. ſucceſſivamente diſuguali tra i detti eſtremi, maggiore velocità ſi trasfonderà nel medeſimo corpo *B*, che ſe per un ſolo intermedio veniſſe percoſſo. Imperocchè ſiccome *A* urtando in *B*, per mezzo di *N*, gl' imprime velocità maggiore, che ſe lo percuoteſſe immediatamente, dunque ancora *N* darebbe maggior velocità a *B* per mezzo d' un altro corpo intermedio *O*, che ſe Fih. 160.

urtaſſe immediatamente in eſſo: e ſimilmente il corpo *O*, darebbe maggiore velocità al corpo *B* per mezzo dell' intermedio *P*, che ſe urtaſſe in eſſo immediatamente, dunque quanto maggiore ſarà la moltitudine de' corpi interpoſti fra *A*, e *B* (purchè ſiano tutti di mediocre grandezza ſucceſſivamente diſuguale) tanto ſarà maggiore la velocità impreſſa nel corpo *B*.

II. Se un corpo intermedio *N* foſse medio proporzionale fra' due eſtremi *A*, e *B*, s' imprimerebbe dal corpo *A* al corpo *B*, per mezzo di queſto medio proporzionale *N*, maggiore velocità, che ſe foſſe percoſſo per mezzo d' un altro corpo mediocre *O*, il quale non foſſe medio proporzionale tra *A*, e *B*, come può dimoſtrarſi con varii eſempj.

III E conſeguentemente ſe tra' corpi *A*, e *B*, ſarà interpoſta una ſerie di corpi mezzani *N*, *O*, *P* &c. continuamente proporzionali, ſi comunicherà maggiore velocità all' eſtremo corpo *B*, che per mezzo di altrettanti corpi intermedii, i quali diſpoſti non foſſero in quella proporzione.

IV. E tanto maggiore ſarà la velocità comunicata all' eſtremo corpo *B*, quanto ſara maggiore la moltitudine de' corpi proporzionali interpoſti, di manierachè ſecondo il computo fatto da Criſtiano Ugenio, ſe fuſſero cento corpi in continua proporzione dupla, cominciando il moto dal maſſimo, ſi comunicherebbe al minimo una velocità 1476000000. di volte maggiore di quella, con cui principiò a muoverſi il primo, e che principiando il moto dal minimo, giacchè non riſulterebbe nel maſſimo velocità maggiore della prima, dovendo ca-

la-

lare la velocità, che s' imprime ad un corpo maggiore, ſarebbe pero il momento del moto nel corpo maſſimo, maggiore del momento, con cui vi ſi principiò a muovere il minimo, in ragione di 467000000000. all' unità. E chi ſa, che la natura in molti riſcontri, ne' quali ſi vede all' improvviſo naſcere una rapidiſſima agitazione, cagionata da un primo moto aſſai lento, come nelle fermentazioni de' liquori, o de' vapori, e nell' accenſione della polvere, non ſi ſerva di queſto ſegreto, diſponendo più corpi inviſibili a un dipreſſo nella medeſima proporzione creſcenti, o decreſcenti, coll' intermezzo de' quali venga a creſcere in immenſo la quantità del moto, o la velocità, che gli rimane comunicata.

PROPOSIZIONE XXXXIX.

Se le direzioni delle due palle mobili A, B *non ſono nella medeſima retta linea, ma in due tra di loro inclinate* AD, BD, *eſſendo la velocità di* A *a quella di* B, *come* AD *a* BF, *trovare primieramente il ſito, in cui eſſi mobili dovranno convenire inſieme: ed in ſecondo luogo, determinare quali direzioni, e velocità ripiglieranno dopo detto concorſo.* Fig. 161. 162.

QUanto alla prima parte congiungaſi la retta *AB*, e poi ſi compiſca il parallelogrammo *BADK*, e nella *DK* pongaſi la parte *DM* eguale alla ſomma de' raggi di queſte due palle mobili, e congiunta *KF*, deſcrivaſi col raggio *DM* l' arco circolare *MG*, ſegante la *FK* in *G*, indi congiunta *DG*, ſi tiri *GH* parallela a *BK*, e poi ſi compiſca il parallelogrammo *DGHI*: dico che nella retta *IH* dovranno convenire eſſi mobili, toccan-

doſi in *L*; Imperocchè, eſſendo *AD* eguale a *BK*, e *DI* eguale ad *HG*, ſarà *AD* a *DI*, come *BK* ad *HG*, e però come *BF* ad *FH*, onde permutando come la velocità *AD* alla velocità *BF*, così ſarà *DI* ad *FH*, ed il rimanente ſpazio *AI* al rimanente *BH*, dunque nel medeſimo tempo ſi faranno detti ſpazj proporzionali alle loro velocità, e però giunta *A* in *I*, ſarà pure arrivata *B* in *H*, e perchè *IH* è eguale a *DG*, ed a *DM*, cioè a' due raggi di dette palle, vi ſaranno le due parti *IL*, *HL* eguali a' loro raggi, e però ivi le due palle *A*, *B* verranno a toccarſi in *L*.

Tavola XVII. Fig. 163.

Circa la ſeconda parte ſi tirino da *A*, e da *B* ſopra *IH* le perpendicolari *AM*; *BN*, e ſi tiri ancora dal punto del contatto *L*, la perpendicolare *LK*, che ſarà tangente di detti mobili, onde eſſendo il moto per *AI* compoſto de' moti per *AM*, e per *MI*, ed il moto per *BH* compoſto de' moti per *BN*, e per *NH*, ma gli due moti *AM*, *BN* non faranno alcun colpo in dette palle, eſſendo equidiſtanti alla loro comune tangente *LK*, dunque ſolamente con le velocità *MI*, *NH*, ſecondo la direzione comune *HI* ſi percuoteranno. Per tanto condotta dal punto *D* la retta *DE* parallela ad *HI*, e compiuti i parallelogrammi *DIMa*, *DHNb*, potrà eſprimerſi in queſta retta l'urto, che farebbero i mobili poſti in *a*, ed in *b*, quello con la velocità *aD*, la quale è eguale ad *MI*, è queſto con la velocità *Db*, eguale ad *NH*, e determinato il punto *C* per centro di gravità di eſſi mobili, ed alla *CD*, poſta eguale *CE*; dovranno dopo il concorſo muoverſi, *A* con la velocità *Ea*, e l'altro mobile *B* con la velocità *Eb*, mantenendo

però

però ancora la velocità di quelle direzioni perpendicolari tra loro parallele, le quali non possono variarsi: dunque posta IP eguale ad Ea, ed erettavi la perpendicolare $P\,Q$ eguale ad AM, congiunta $I\,Q$, sarà la direzione, e la velocità con cui il corpo A dovrà muoversi dopo il concorso col corpo B: e posta similmente HO eguale ad Eb, e tirata la perpendicolare OR eguale a BN, congiunta HR, sarà la direzione, e la velocità, con cui si muoverà il corpo B dopo il concorso con A. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se il corpo B fosse quieto, ed in esso urtasse obliquamente il corpo A colla direzione AI, venuto al di lui contatto, e congiunti gli centri loro colla retta BI, sopra di cui sia tirata la perpendicolare AM, esso corpo A non farà alcuna impressione in B colla direzione, e velocità AM per essere parallela ad LK tangente d' ambidue ne' loro contatti, ma solamente colla direzione, e velocità MI, onde posta BH eguale ad MI, talmente riuscirebbe questa percossa, come se il corpo A fosse in H, ed urtasse il corpo B prima quieto con tale velocità HB, però divisa HB in C, di manierachè sia HC a CB, come B ad A, che sarebbe C il centro di gravità di essi pesi, quando A fosse in H, posta CE eguale a CB, si muovera il corpo B nella stessa linea, cioè per BN, eguale ad EB e posta IP eguale ad EH, tirata la perpendicolare $P\,Q$ eguale ad AM, congiunta $I\,Q$, si muoverà il corpo A dopo la percossa, con la direzione, e velocità $I\,Q$, perchè averà nella direzione Fihi164.

ne IP la velocità eguale ad EH, e nella PQ parallela, ed eguale ad AM, la ſteſsa direzione, e velocità, che prima aveva, e che non reſta alterata in tale percoſſa, dunque anderà col moto compoſto di queſte due velocità, e direzioni, cioè per IQ.

II. Se ambidue queſti corpi foſſero tra di loro eguali, comecchè tutta la velocità MI ſi comunicherebbe al corpo B, dovrebbe muoverſi il percuziente A colla ſola direzione, e velocità della perpendicolare IS, eguale ad AM, e parallela ad eſſa, non eſſendo queſta alterata in detta percoſſa, ma ſolamente perdutaſi l' altra velocità MI, comunicata interamente al corpo B.

Fig.165. III. Se finalmente il corpo B foſſe totalmente fiſſo, ed immobile, ovvero infinitamente maggiore del percuziente A, doverà il mobile A ritornare indietro, come rifleſſo da eſſo corpo B per la direzione IQ, che farà l' angolo QIS di tal rifleſſione, eguale all' angolo dell' incidenza AIR; Imperocchè tornando indietro colla velocità IM eguale alla velocità MI perpendicolare alla ſuperficie di eſſo B, in cui ha urtato il mobile A, e ſeguendo a muoverſi colla velocità MQ eguale ad AM, che prima aveva nella direzione parallela alla lunghezza RS di eſſo corpo B, dunque farà la direzione IQ eguale alla prima AI, eſſendo i triangoli retrangoli AMI, QMI ſimili, ed eguali, onde l' angolo MAI è eguale ad MQI, e gli alterni delle parallele AIR, QIS parimente devono eſſere eguali, onde l' angolo dell' incidenza è eguale all' angolo della rifleſſione.

PRO-

PROPOSIZIONE L.

Se due peſi A, *e* B *ſiano conneſſi con una verga, o linea rigida* A B *poſta orizzontalmente, cadendo parallela a ſe ſteſſa, farà maggiar percoſsa in un oſtacolo* E, *col punto* C, *centro di gravità di eſſi peſi, che con qualunque altro punto* D: *ma ſe ſi muoveſse circolarmente intorno ad un punto* H *fuori del ſito d' ambidue i peſi, la maggior percoſsa parimente ſi farebbe in un tal punto* C, *che ſia il centro de' momenti con cui ſi muovono tali peſi.* Fig. 166. 167. 168.

IMperocchè ricevendo il ſoſtegno *E* l' incontro della verga *A B* nel centro *C* di eſſi peſi, quando cade parallela a ſe ſteſſa, ſi troverà aggravato da ambidue i momenti eguali di tali peſi, di cui non può prevalere l' uno all' altro, e però dovrà ſoſtenergli, laddove, ſe vi cadeſſe nell' altro punto *D*, poſto tra il centro *C*, ed uno di eſſi peſi *B*, comecchè ſarà minore il momento del peſo *B* dalla diſtanza *B D*, che dalla *B C*, ed il momento di *A* divenendo maggiore dalla diſtanza *A D*, che non era dalla *A C*, dividendoſi *A* nelle parti *F*, *X*, delle quali ſtia *F* a *B*, come *B D* a *D A*, riuſcendo *D* ſolamente il centro de' peſi *B*, *F*; queſti ſi equilibreranno nel ſoſtegno *E*, cadendovi col punto *D*, ma l' altra porzione *X* coll' eccesſo del momento di *A* ſopra quello di *B* ſeguirà a cadere, rivoltando eſſa verga, e però ne riuſcirà minore percoſſa all' oſtacolo *E*, di quella, che ſoffrirebbe ricevendo eſſa verga nel punto *C*, unico centro de' peſi *A*, *B*, da' quali ſarà totalmente aggravato.

Ma movendoſi eſſa verga intorno al punto *H*,

co-

come centro del moto, non averanno essi pesi la stessa velocità, ma sarà quella di *A* a quella di *B*, in ragione delle distanze *AH*, *BH*, e però il momento di *A* al momento di *B*, essendo in ragione composta di *A* a *B*, e di *HA* ad *HB*, dividendosi così la *AB* nel punto *C*, di maniera che sia *BC* a *CA*, come il momento di *A* al momento di *B*, ed urtandosi il sostegno *E* da essa verga nel punto *C*, gli farà tale percossa, come se due pesi *G*, *K* proporzionali a que' momenti, e congiunti colla linea rigida *GK*, urtassero in *E*, cadendo parallelamente essa verga, col punto *L*, centro de' loro pesi, da cui è divisa *GK* nella stessa ragione, come era divisa *AB*, nel centro de' momenti di *A*, e *B*, però siccome questa verga *GK* dovrebbe fare nel punto *L* maggior percossa, che in un altro punto, così ancora la maggiore percossa della verga *AB*, mossa all' intorno al punto *H*, seguirà dall' urto del suddetto punto *C* centro di quei momenti. Il che &c.

COROLLARI.

Fig. 169. I. Se la figura piana, o solida *DFHIE*, cade sopra un ostacolo con moto parallelo alla sua lunghezza, similmente farà maggior percossa, urtando dirimpetto al centro di gravità di essa figura; ma se si movesse d' intorno ad un punto *H*, descrivendo la figura *HMNB*, le cui ordinate *AM*, *BN* sieno proporzionali a' momenti delle sezioni di quel mobile (la quale dirassi la scala de' momenti loro) e trovato in questa figura il centro di gravità *G*, condotta *GC* perpendicolare alla lunghezza del mobile *HB*, sarà nel punto *C* il luogo, in cui farà la mag-

maggior percoſſa, movendoſi circolarmente dal termine *H*, che in qualſivoglia altro punto.

II. Un regolo, o baſtone cilindrico *HA*, egualmente groſſo in tutte le ſue parti, girando dal termine *H*, farà la maggior percoſſa nel punto *C* lontano dal termine *A* per un terzo di ſua lunghezza, perchè la ſcala de' momenti delle ſue parti ſarebbe un triangolo *HAM*, eſſendo le ſezioni tra loro eguagli, e le velocità proporzionali alle diſtanze dal centro del moto, e però i detti momenti di *A*, e *B* ſono come le ordinate *AM*, *BN* di queſto triangolo, il cui centro di gravità *G* è diſtante dalla baſe per un terzo di ſua lunghezza. Fig. 170.

CAPITOLO IX.

De' Pendoli.

PROPOSIZIONE LI.

Se due Pendoli CG, OF *ſi rimovono ad angoli eguali* GCA, FOD *da' loro perpendicoli, indi ſi laſcino ricadere, ſaranno i tempi delle oſcillazioni per gli archi ſimili* ABG, DEF *in ragione ſubduplicata de' raggi* CA, OD. Fig. 171. 172.

SI prendano in eſſi due archetti infinitamente piccoli tra di loro ſimili *AH*, *DI*, ed altri due archetti ſimili *HB*, *IE*, congiunte le rette *AH*, *DI*, e le altre due *HB*, *IE*, le quali concorrano con le orizzontali *AK*, *DL* in *K*, ed *L*. E' manifeſto

feſto, eſſer ſimili i due triangoli *ACH*, *DOI*, e gli altri due *BCH*, *IOE*, ſiccome ancora i due *AKH*, *DLI*, avendo i loro lati omologhi paralleli: dunque i tempi della caduta per la corda *AH*, e per l'altra *DI* egualmente inclinata, ſono in ſubduplicata ragione di *AH* a *DI*, e però in ragione ſubduplicata di *CA* ad *OD*, e ſimilmente in tale ragione ſarebbe il tempo per *KH*, al tempo per *LI*, o il tempo per tutta la *KB*, al tempo per tutta l'*LE*, dunque ancora il tempo per la rimanente *HB*, al tempo per la rimanente *IE*, dopo la diſceſa di *HA*, e di *ID*, è ſempre nella ſteſſa ragione, o foſſe fatto il moto per le rette *KH*, *LI*, o per l'altre *AH*, *DI*, eſſendo la ſteſſa velocità acquiſtata tanto per *KH*, che per *AH*, con cui s'inoltra il mobile per *HB*: ed altresì la medeſima velocità acquiſtata per *LI*, che per *DI*, con cui proſeguirebbe il moto per *IE*, onde diviſi gli archi ancora rimanenti *BG*, *EF* in altri archetti ſimili, le corde de' quali farebbero in queſto, e in quello, poligoni ſimili inſcritti in detti archi, e per la loro minima piccolezza convenienti con detti archi, è chiaro, che il tempo per tutte le corde inſcritte nell'arco *AG*, al tempo per altrettante inſcritte nell'arco *DF*, ſarà in ragione ſubduplicata del raggio *CA* al raggio *OD*, e però ancora i tempi delle oſcillazioni di queſti pendoli per gli archi ſimili ſono in detta ragione. Il che &c.

COROLLARI.

I. Quindi le lunghezze de' pendoli ſono, come i quadrati de' tempi, per cui fanno archi ſimili, ed i tempi di tali oſcillazioni ſono, come le radi-

ci

ci quadrate di eſſe lunghezze: così il tempo della oſcillazione d'una lampada pendente per una corda di ſedici braccia, al tempo, con cui un altra lunga nove braccia fa ſimile oſcillazione, ſtarà come quattro a tre, che ſono le radici quadrate di ſedici, e nove.

II. Il numero delle oſcillazioni eguali fatte in un dato tempo da qualche pendolo, al numero di eguali vibrazioni fatte da un altro pendolo nello ſteſſo tempo, ſaranno reciprocamente come il tempo di una vibrazione per detto pendolo, al tempo di una vibrazione ſimile del primo: così ſe il pendolo di ſedici braccia faceſſe in un minuto primo vibrazioni 21. quell'altro di braccia nove ne farebbe nello ſteſſo tempo 28. eſſendo 28. a 21. come 4. a 3. cioè come il tempo della vibrazione del pendolo di ſedici braccia, al tempo di una vibrazione del pendolo di nove braccia.

III. Quindi dal numero delle vibrazioni d'una Lampada ſoſpeſa dalla volta d'una Chieſa, per piccoli archetti ſimili inſegnò il Galileo poterſi ritrovare l'altezza di eſſa; Imperocchè ſe ſi aveſſe un pendolo d'un braccio, e quattro quinti, la cui vibrazione ſi fa in un ſecondo minuto, farebbe queſto in un minuto primo ſeſſanta vibrazioni, però ſe ſi vedeſſe nello ſteſſo tempo di un minuto primo, fare la lampada ſolamente dodici vibrazioni, ſi dovrebbe inferire, eſſere l'altezza di detta lampada conneſſa colla ſua fune alla volta per un intervallo di braccia quarantacinque, eſſendo ſeſſanta a dodici, come cinque ad uno, onde il tempo d'una vibrazione della lampada, al tempo di una ſimil vibrazione del pendolo piccolo, ſarà in ſimil ra-

ragione di 5. ad 1. che è ragione ſubduplicata di eſſe lunghezze, di cui ſarà quella venticinque volte maggiore di queſta, come è il quarantacinque reſpettivamente all' uno con quattro quinti.

PROPOSIZIONE LII.

Fig.173. *Movendoſi il pendolo* CA *per qualunque arco del quadrante* GBA, *le forze, con cui ſi muove in qualunque ſito, ſono come i ſeni degli angoli fatti col perpendicolo dal poſto di eſſo pendolo ſollevato, e le forze centrifughe ſoſtenute dal fiſso punto* C, *intorno a cui ſi muove, ſono come i ſeni degli angoli, che fa l' inclinazione di eſso pendolo con l' orizzonte* CG.

IMperocchè giunto il pendolo in qualunque ſito *GB*, e condotta la tangente *BE* dell' arco, fino all' orizzontale *CG*, ſi tiri ancora la *DH* perpendicolare al raggio *CB*, che ſarà parallela alla tangente *BE*: è manifeſto, che la forza, con cui ſi muove il peſo di eſſo pendolo nel ſito *B* dell' arco, è quella, che averebbe nel piano inclinato *BE*, che tocca eſſo arco, dunque ſta queſta forza alla ſua gravità aſsoluta, che avrebbe nel perpendicolo, come *DB* a *BE*, o come *CD* (che è eguale a *BF*) al raggio *CB*, eſsendo queſte rette proporzionali, dunque in qualunque ſito ſi trovi eſso pendolo, ſarà la forza, con cui ſi muove, alla gravità aſsoluta, come *BF* ſeno dell' angolo *BCA* al raggio *CB*, e la gravità aſsoluta ſtarebbe alla forza, con cui ſi moveſse il globo per qualunque altro punto dell' arco, ſimilmente come il raggio, al ſeno di quell' angolo, che farebbe il pendolo colla perpendicolare

lare medeſima CA, dunque le forze, con cui ſi muove eſſo globo in più ſiti dell'arco, ſono come i ſeni di detti angoli fatti col perpendicolo, ſecondo la ſituazione del pendolo. Eſſendo poi ancora CD a CB, come DH a DB, ſarà quella forza, con cui ſi muove il peſo alla ſua gravità aſſoluta, con cui ſi muoverebbe nel perpendicolo, come DH a DB, però eſſa gravità aſſoluta eſpreſſa per DB riſolvendoſi nelle due forze DH, HB, di cui quella ſi pratica nel ſito B per l'inclinazione della tangente BE parallela a DH, ſarà l'altra forza rimanente HB quella forza centrifuga, con cui eſſo peſo contende di ritirarſi per la direzione AB dal centro C, il quale con egual forza oppoſta deve ritenerlo, dunque ſta ancora la gravità aſſoluta del peſo, alla forza centrifuga di eſſo nel ſito B, come DB a BH, cioè come il raggio CB al ſeno DB dell'angolo fatto da eſſo pendolo coll'orizzontale CG, ed in qualunque ſito ciò eſſendo, ſaranno ſempre le forze centrifughe, come i ſeni degli angoli, che fa il pendolo in qualunque poſto coll'orizzonte. Il che &c.

COROLLARI.

I. Alzando ſopra i punti dell'arco ABG le rette eguali a detti ſeni BF, corriſpondenti agl'angoli fatti dal pendolo col perpendicolo in qualunque ſito, ne riuſcirà la ſcala delle forze, con cui ſi muove ne' detti punti il globo attaccato al pendolo nelle ſue vibrazioni, la qual figura ſarebbe l'ungula tagliata dalla ſuperficie cilindrica per un piano inclinato ad angolo ſemiretto, di cui è nota la quadratura.

II.

II. Le forze centrifughe, eſsendo come i ſeni *BD*, o come le diſtanze *CF* dall' orizzonte, ſaranno in ſubduplicata ragione delle velocità acquiſtate per la caduta di tutto il quadrante *GBA*; Imperocchè la velocità in *B* ſarebbe la medeſima, che quella ſi acquiſterebbe per la diſceſa *CF*, e la velocità acquiſtata per tutto l'arco *GBA* ſarebbe come quella, che ſi acquiſterebbe colla caduta *CA*, le quali velocità ſono in ſubduplicata ragione di *CF* a *CA*, e però eſsendo la forza centrifuga in *B* a quella in *A*, come *DB*, ovvero *CF* a *CA*, ſono in ſubduplicata ragione delle velocità ivi acquiſtate.

III. Caduto il globo per tutto il quadrante *GBA* parmi, che dovrà tirare il centro *C* doppiamente di quando gli era attaccato fermo, perchè ivi lo tirava ſolamente colla ſua gravità aſsoluta, ma dopo quella diſceſa, vi ſi trova ancora la forza centrifuga, che è, come il raggio *CA*, ſiccome la gravità aſsoluta era proporzionale al medeſimo raggio.

PROPOSIZIONE LIII.

Se il filo d' un pendolo CD *voltandoſi d' intorno* Fig. 174. *alla Cicloide* CNA *deſcritta dal cerchio* AGB, *il cui diametro* AB *ſia la metà di eſso filo, farà la vibrazione* AMD, *ſcoſtandoſi da quella curva, e ritornando perpendicolare all' orizzonte, ſarà la curva dal peſo* D *deſcritta, ſimile, ed eguale a detta Cicloide.*

ORdinata *EN* parallela alla baſe *BC*, e tiratane un' altra infinitamente proſſima *YO* ſi condu-

ducano le corde AK, ed AG, queſta ſegante la YK in L, e tirate OP, KH, LF, parallele ad AB, e col centro A deſcritto l' arco circolare KI, intendaſi per lo punto N paſſare il cerchio VNQ nel ſito, in cui deſcrive l' arco della Cicloide AON. E' manifeſto, che l' ordinata EN è eguale alla ſomma dell' arco circolare AG, e del ſeno GE, imperocchè rivoltatoſi il ſemicircolo BGA ſopra la retta BC, con la quale rivoluzione il vertice A, deſcrivendo la curva, è venuto in N, e quando foſſe arrivato in C, dove finiſce la curva ANC, ſi ſarà adattata tutta la ſemicirconferenza BGA alla baſe BC, la quale gli ſarà eguale, dunque eſſendo il cerchio nel detto ſito VNQ, dovrà eſſere l' arco Vb eguale alla retta BV, ed il rimanente arco VN eguale al reſto della baſe VC, però eſſendo XN, eguale al ſeno EG, e la retta EX eguale a BV, cioè all' arco Vb, che pure è eguale all' arco corriſpondente QN, ovvero ad AG, perciò ſarà tutta l' ordinata EN, eguale alla ſomma dell' arco AG, e del ſeno GE, e così ancora l' altra ordinata YO, ſarà eguale alla ſomma dell' arco AK, e del ſeno KY: quindi PN differenza delle ordinate EN, YO, ſarà eguale alla ſomma di GK, differenza degli archi, e della GH, differenza de' ſeni corriſpondenti: onde eſſendo GK eguale a KL, come la tangente KR eguaglia la tangente AR del circolo, ed eſſa KL eſſendo eguale ad FH, ſarà dunque PN eguale a GF, che è la ſomma della differenza de' ſeni GH, e della HF, differenza degli archi eguale a GK, ed eſſendo ancora OP eguale, e parallela ad LF, ſarà GL parallela, ed eguale ad NO, onde la tangente del-

la Cicloide NQ, sarà eguale, e parallela alla corda GA; e perchè nel triangolo GKL isoscele l' arco KI è perpendicolare alla base GL, la divide per mezzo, però NO eguale a GL è doppia di GI differenza delle corde AG, AK, onde la porzione della curva AN deve esser doppia della corda AG, e tutta la curva ANC doppia del diametro AB, come si suppone essere il filo CD, il quale però complicandosi con essa curva ad esso eguale, si combagerà totalmente con la medesima, e quindi poi distraendosi in qualunque parte dell' oscillazione AM, sarà nel sito MN tangente di essa curva, alla cui parte AN essendo eguale MN, parte del filo scostatosi da essa, riuscirà MN doppia di NQ, e condotta MS perpendicolare ad MQ concorrente col diametro del cerchio VQ in S, sarà il triangolo QMS eguale al triangolo QNV, essendo MQ eguale a QN, e l' angolo MQS eguale all' altro NQV, e gli angoli in M, ed in N retti, però il semicircolo descritto intorno l' angolo QMS sarà eguale all' altro semicircolo QNV, e l' arco QM essendo eguale all' arco QN, ed ancora all' arco AG, siccome l' arco AG eguaglia la retta GN, la quale è eguale alla retta AQ, sarà l' arco del semicircolo QM eguale ad essa AQ, e però il punto M sarà nella Cicloide descritta sopra la retta AZ dal medesimo circolo; dunque esso pendolo CD descriverà la curva AMD, eguale alla Cicloide ANC, a cui era applicato. Il che &c.

COROLLARIO.

Se saranno due Cicloidi eguali CNA, CT, il pendolo CD nella sua vibrazione descriverà intera

ra la Cicloide, o qualche parte di essa, secondo che sarà applicato, o a tutta la Cicloide *ANC*, o alla sola porzione *NC* di essa.

PROPOSIZIONE LIV.

Lo stesso pendolo interposto alle curve Cicloidali CNA, CT, *qualunque vibrazione faccia, o per tutta la curva* AMD, *o per la sola parte di essa* MD, *si farà sempre in tempo eguale.* Tavola XVIII. Fig. 17.

SI tiri l'ordinata *MP* segante il cerchio genitore in *K*, ed il diametro in *P*, e tirata qualunque altra ordinata *FR* segante il cerchio in *I*, condotte le corde *DK*, *DI*, si faccia come *DK* a *DI*, così il diametro *DZ* ad un altra corda del cerchio *DH*, e per lo punto *H* si tiri un' altra ordinata *BHO*; essendosi dunque dimostrato, che le porzioni della curva Cicloidale prese dal vertice sono il doppio delle corde corrispondenti nel cerchio, siccome stà *DK* a *DI*, come *DZ* a *DH*, così pure starà *DM* a *DF*, come *DA* a *DB*, e permutando *DM* a *DA*, come *DF* a *DB*: onde presa una porzione *FG* infinitamente piccola della curva *DF*, se si farà come *DM* a *DA*, così *DG* a *DE*, queste pure saranno come *DF* a *DB*, e la rimanente *FG* alla rimanente *BE* sarà nella stessa proporzione: onde saranno parti infinitesime proporzionali, e però simili alle intiere *DF*, *DB*, ed alle *DM*, *DA*: essendo poi i quadrati delle corde *DK*, *DI*, *DZ*, *DH* proporzionali alle rette *DP*, *DR*, *DZ*, *DO*, perchè moltiplicate tutte nel diametro *DZ*, fanno rettangoli eguali a' detti quadrati

drati, ſecondo che ſaranno proporzionali i quadrati *DK*, *DI*, *DZ*, *DH*, ſarà pure *DP* a *DR*, come *DZ* a *DO*, e la rimanente *PR* alla rimanente *OZ* ſarà nella ſteſſa proporzione degli antecedenti *DP*, *DZ*, cioè in ragione duplicata della *DK* alla *DZ*, che è quella de' loro quadrati. o dicaſi in ragione duplicata dalla curva *DM* alla *DA*, o della infiniteſima *FG* alla infiniteſima *BE*; ma la ragione delle altezze *PR*, *ZO* è pure duplicata delle velocità concepute nelle diſceſe per *MF*, e per *AB*, dunque gli ſpazj *FG*, *BE* eſſendo proporzionali alle velocità concepute per tali diſceſe, dovranno farſi nel medeſimo tempo, il che ſempre accadendo, ed eſſendo altrettante le infiniteſime parti *FG* in *DM*, che le infiniteſime *BE* in *DA*, ſi dovrà fare nel medeſimo tempo la vibrazione *MD*, come tutta la *AD*. cominciata quella dalla quiete in *M*, e queſta dalla quiete in *A*, però qualunque vibrazione fatta dal pendolo interpoſto fra le Cicloidi *CN*, *CT*, diraſſi iſocrona, cioè di tempo eguale.

COROLLARIO.

Quindi è manifeſto, che le vibrazioni fatte circolarmente da un pendolo libero non ſono eguali, facendoſi ora per un arco più ampio, ora per uno più piccolo, anzi devono farſi più tardi le oſcillazioni maggiori, che le minori, perchè, ſe applicandoſi il filo alla Cicloide fa nello ſteſſo tempo l'arco *AMD*, che il ſolo arco più ſtretto *MD*, la diſceſa per le parti più alte *AB*, *AM* facendoſi con più corta lunghezza del filo tangente la ſuperiore Cicloide in *V*, ed in *N*, deve fare queſte

parti

parti più preſto, che ſe liberamente il filo intero ſi vibraſſe, deſcrivendo un quarto di circolo, perchè nelle parti ſuperiori di eſſo più tardi ſi muoverebbe, che per le parti *AM*, *AB* della Cicloide co' fili più corti *NM*, *VB*; onde Criſtiano Ugenio eſattamente fece inſerire il pendolo dell'Orologio tra due porzioni Cicloidiali, acciò rieſcano iſocrone le oſcillazioni regolari da eſſi fatte, o per arco più ampio, o più anguſto.

PROPOSIZIONE LV.

Il tempo di qualunque oſcillazione FDG, *ovvero dell' intera* ADV, *fatta dal pendolo* CD *interpoſto alle curve Cicloidali* CN, CT *ſta al tempo della caduta per l' aſſe di eſſa Cicloide* ZD, *che è la metà del filo* CD, *come la Periferia del circolo al ſuo diametro.* Fig. 176.

SI tirino due ordinate infinitamente proſſime *BO*, *MP* ſeganti la periferìa del circolo genitore ne' punti *H*, *K*, e condotta la tangente del cerchio *HR*, ſi tirino le corde *ZH*, *DHS*, la quale prolungata ſega in *S* la baſe della Cicloide *AV*, e conviene in *L* con la ſeconda ordinata *MP*. Supponendo, che un mobile con la velocità acquiſtata dalla caduta *CD*, ſi muoveſſe equabilmente per la circonferenza *DXZH*, ſarebbe il tempo per *HK* al tempo della diſceſa per *BM* del pendolo, che deſcriveſſe la curva *AMDV*, in ragione compoſta della diretta degli ſpazj *HK*, *BM*, e della reciproca delle velocità adoperate in *B*, ed in *H*, ma la prima ragione è quella di *HK* ad *HL*, (eſſendo *HL* eguale a *BM*) cioè di *HR* ad *HS*, la ſecon-

da poi, è di *HZ* a *ZD*, ovvero di *HS* ad *SZ*, dunque il tempo per *HK* al tempo per *BM*, ſta come *HR*, o come la ſua eguale *RZ* ad *SZ*, cioè in ragione ſubdupla, quale è quella appunto della *ZD* alla *CD*: dunque convertendo, il tempo per tutta la oſcillazione per la curva *ADV*, al tempo del moto equabile per tutta la circonferenza *DXZHD* è come *CD* a *DZ*; ma il tempo del moto equabile per la circonferenza, al tempo del moto equabile per *CD* colla ſteſſa velocità ottenuta nella caduta *ZD*, il qual tempo ſarebbe il medeſimo di tale caduta, ſtarebbe come la circonferenza ſuddetta alla lunghezza del filo *CD*, dunque per l' egualità perturbata, il tempo per la oſcillazione *ADV* al tempo per la caduta nel perpendicolo *ZD*, è come la circonferenza *DXZHD* al ſuo diametro *ZD*, e così può dirſi ancora del tempo di qualunque altra minor vibrazione *BDG*, eſſendo tutte contemporanee.

COROLLARI.

I. Le lunghezze de' pendoli ſaranno in duplicata ragione de' tempi delle loro vibrazioni, eſſendo ancora le metà delle loro lunghezze, come i quadrati de' tempi delle diſceſe perpendicolari per tali metà, ed i tempi di tali diſceſe a' tempi delle vibrazioni de' pendoli intieri, nella medeſima ragione del diametro alla periferìa circolare.

II. Se nello ſteſſo tempo, in cui il pendolo fa una vibrazione, cadeſſe un grave perpendicolare, ſarebbe lo ſpazio fatto da queſto alla metà della lunghezza di quel pendolo, come il quadrato della periferìa circolare al quadrato del diametro, eſſen-

eſſendo gli ſpazj fatti perpendicolarmente cadendo in ragione duplicata de' tempi, onde ſiccome un pendolo negli Orologj Aſtronomici fa qualunque vibrazione in un minuto ſecondo con la lunghezza di tre piedi, e otto linee della miſura di Parigi, dovrà un mobile cadere perpendicolarmente in un minuto ſecondo per quindici piedi di Parigi, ed un' oncia in circa, eſſendo tal lunghezza a quella della metà di eſſo pendolo, come il quadrato della periferìa circolare al quadrato del ſuo diametro.

PROPOSIZIONE LVI.

Se due peſi A, B *ſono congiunti in un pendolo con un filo, o verga infleſſibile* C B, *il punto* D *della maggior percoſſa aſſegnato nella Propoſizione* 50. *ſarà il centro d' oſcillazione, di manierachè nello ſteſſo tempo dovrà vibrarſi eſſo pendolo* C B A *come un pendolo della lunghezza* C D, *che aveſſe nello ſteſſo punto* D *uniti i peſi medeſimi.* Fig. 177.

IMperocchè eſſendo in *D* il centro del momento de' peſi *A*, *B*, lo ſteſſo ivi ſarebbe ſe foſſero ambidue i peſi in eſſo punto *D* raccolti, e però nell' uno, e nell' altro caſo dovrà farſi una ſimile, ed eguale vibrazione da tali pendoli. Il che &c.

COROLLARI.

I. Si trova adunque il centro d' oſcillazione, con dividere la diſtanza de' peſi *A*, *B* in *D* reciprocamente in ragione de' loro momenti, cioè in maniera, che ſtia *A D*, a *D B* nella ragione compoſta de' peſi, e delle loro velocità, cioè di *B* ad *A*, e

di BC ad AC, essendo tali distanze dal centro del moto C, in ragione delle loro velocità; e se fossero essi pesi tra loro eguali, essendo i loro momenti solamente in proporzione delle loro velocità, basterà, che si faccia AD a DB, come BC a CA, che così sarà D il centro de' loro momenti, e della loro oscillazione.

II. Essendo ancora un solo peso GF sferico, o Fig. 178. cilindrico appeso al filo, non dovrà misurarsi la lunghezza del pendolo solamente dal suo centro di gravità E al centro del moto C, ma diviso esso mobile in due parti eguali IFH, HGI, i cui centri di gravità siano in A, e in B, dovrà farsi come BC ad AC, così AD a DB, e sarà il punto D il centro d' oscillazione, e però dovrà prendersi CD, e non CE per la lunghezza di esso pendolo.

III. Anzi non essendo il filo stesso privo di gravità, ma bensì un regolo, o una lama di ferro, o di ottone, converrà pure far conto di tal peso, e computandolo col peso del mobile trovarne il centro del momento, per determinarne il centro d' oscillazione, e la vera lunghezza di esso pendolo.

IV. Movendosi qualunque solido CIH dal suo Fig. 179. 180. vertice C, come un pendolo, ritrovatone il sito del punto D in cui farebbe la massima percossa, come si è insegnato nella Proposizione 50. sarà esso D il centro delle oscillazioni: onde per il Corol- Fig. 179. lario 2. di detta Proposizione 50. se il solido sarà egualmente grosso da per tutto, come un Prisma, un Cilindro, un Parallelepipedo, sarà CD due terzi di sua lunghezza CG, essendo detto centro D distante un terzo dalla base IH, come il centro di gravità di un triangolo, che sarebbe la scala de'

mo-

menti delle ſezioni di eſſo cilindro; e ſe *CIH* foſſe una piramide, ovvero un cono, ſarebbe *CD* quattro quinti della lunghezza intera *CG*, come il centro d' equilibrio in un trilineo della parabola cubica, la quale ſarebbe la ſcala de' momenti di quel ſolido piramidale, ovvero conico. Fig. 180.

CAPITOLO X.

Della reſiſtenza de' Solidi.

DEFINIZIONI.

I. LA reſiſtenza de' ſolidi aſſoluta diceſi quella forza, con cui reſiſtono alla diviſione delle loro parti, tratte direttamente da una potenza, che con direzione perpendicolare alla ſezione da farſi, cerca di ſeparare eſſe parti.

II. La reſiſtenza reſpettiva è quella forza, con cui reſiſte alla direzione di eſſe parti ſopra il ſoſtegno, tratte da quella potenza, che con direzione, o parallela alla baſe, o inclinata ad eſſa obliquamente, cerca di ſtrappare eſſo ſolido dalla linea, ſopra di cui è retto.

SUPPOSIZIONE.

Qualunque ſia la forza con cui ſono coerenti le parti del ſolido, e reſiſtono alla loro ſeparazione, eſſendo egualmente diffuſa in qualunque ſito di tali parti omogenee, ſiccome da per tutto vi è gravità eguale, può concepirſi ancora la forza di tali re-

reſiſtenze, come raccolta nel centro di gravità di qualunque ſezione, cui ſtà applicata per impedirne la rottura nel medeſimo piano: e perchè dipende la reſiſtenza aſſoluta dalla quantità delle fibre, di cui le ſezioni ſono compoſte, e connettono una parte con l'altra, perciò in diverſe ſezioni del medeſimo ſolido, o di due ſolidi compoſti della medeſima materia, poſſono ſupporſi le loro reſiſtenze aſſolute proporzionali a quelle ſezioni medeſime, in cui ſtanno per impedirne la diviſione.

PROPOSIZIONE LVII.

Fig. 181. *Di qualunque ſolido* EBFL, *fiſſo per eſempio nel muro ſopra il ſoſtegno* EF *colla ſezione* EBF, *il cui centro di gravità* C, *ſarà la reſiſtenza aſſoluta alla reſiſtenza reſpettiva di eſso, come la lunghezza* DL, *con cui ſi ſporge oltre il ſoſtegno, ſe è perpendicolare alla direzione del peſo* LG, *che cerca di ſepararlo, o come la perpendicolare* DL *condotta dal ſoſtegno alla detta direzione, alla diſtanza* CD, *del centro di eſſa ſezione dal medeſimo ſoſtegno.*

Sia *H* la potenza, che tirando il ſolido per la direzione *CA* perpendicolare alla baſe *EBF*, eguagli appunto la reſiſtenza aſſoluta di eſſo, di manierachè accreſciuta di qualunque minimo peſo poteſſe vincerla, e ſeparare il ſolido da detta baſe: ſia ancora la potenza *G* applicata nell'eſtremo termine *L*, la quale tirando il ſolido con la direzione *LG*, cui ſia perpendicolare *DL*, ne eguagli la reſiſtenza reſpettiva, di manierachè ſe vi ſi aggiungeſſe qualche minimo peſo, poteſſe rompere

pere il ſolido ſopra il ſoſtegno *EF*, e vincerne la reſiſtenza reſpettiva. Sarà dunque il momento di *G* eguale al momento di *H*, potendo l'una, e l'altra rompere il medeſimo corpo nella ſteſſa ſezione: dunque ſarà eguale il momento della potenza *G*, al momento della reſiſtenza aſſoluta, che ſi concepiſce nel centro *C*, e però nel vette iſteſſo *CDL*, ſarà la reſiſtenza aſſoluta, poſta in *C*, alla reſiſtenza reſpettiva eguale al peſo *G*, poſto in *L*, come reciprocamente *DL* a *CD*, per eſſere i loro momenti eguali. Il che &c.

COROLLARI.

I. Ciò vale in qualunque ſpecie di ſolidi, o ſiano d'uniforme groſſezza, o ſi vadino aſſottigliando, o ingroſſando nelle ſezioni parallele alla baſe, purchè ſi aſtragga dal peſo del medeſimo ſolido, e ſolo ſi attenda per ora la di lui lunghezza, e la qualità della baſe infiſſa nel muro, e non le altre ſezioni le quali non accreſcono ne diminuiſcono la facilità della diviſione del ſolido da eſſa baſe.

II. Se le baſi de' ſolidi egualmente lunghi *EBFL*, *IBKL* averanno lo ſteſſo centro di gravità *C*, ſaranno le loro reſiſtenze reſpettive, ſiccome ancora le reſiſtenze aſſolute, proporzionali alle loro baſi; Imperocchè eſſendo le reſiſtenze aſſolute del primo ſolido, e del ſecondo, come le potenze *H*, *M* pronte a dividerlo, e le reſiſtenze loro reſpettive *G*, *N* pronte a ſtrapparlo ſopr' al ſoſtegno, ſiccome tanto *H* a *G* è come *DL* a *DC*, quanto ancora *M* ad *N* ſarebbe nella ſteſſa ragione di *DL* a *DC*, dunque ancora permutando *H* ad *M*, ſtà come *G* ad *N*, e però le reſiſtenze aſ- Fig. 181.

ſo-

ſolute di queſti ſolidi proporzionali a quelle baſi, ſono ancora come le reſiſtenze reſpettive *G N*, le quali però ſono proporzionali a dette baſi.

III. Le reſiſtenze reſpettive de' ſolidi di diverſa
Fig.183. lunghezza *D L*, *D P* ſu la medeſima baſe *E B F*, ſaranno reciproche alle dette lunghezze, perchè ſe *G* eguaglia la reſiſtenza del ſolido più corto, ed *H* quella del più lungo, ſarà *G* alla reſiſtenza aſſoluta della baſe comune, come *C D* a *D L*, e queſta reſiſtenza ſarà al peſo *H*, come *P D* a *C D*; dunque per l' ugualità perturbata, *G* ad *H*, è come *D P* a *D L*.

Fig.184. IV. Se foſſero baſi eguali, i cui centri di gravità *C*, ed *I* ſiano diverſamente lontani dal ſoſtegno, ſarà la reſiſtenza del ſolido, ſu la baſe *F E B* alla reſiſtenza aſſoluta del medeſimo, come *C D* alla ſua lunghezza *D L*, e la reſiſtenza reſpettiva dell' altro ſolido ſopra la baſe *R S T* nella medeſima lunghezza, ſarà alla ſua reſiſtenza aſſoluta, come *I D* a *D L*, e però la reſiſtenza reſpettiva del primo a quella del ſecondo, è come *C D* a *D I*, che ſono le diſtanze de' loro centri dal ſoſtegno.

V. E però lo ſteſſo ſolido, la cui baſe ſi diſponga in diverſo ſito, ove abbia il centro di gravità più lontano, o più vicino al ſoſtegno, averà la reſiſtenza reſpettiva, ivi maggiore, ivi minore nella proporzione delle diſtanze centrali.

VI. La canna vota la cui baſe è l'armilla *I K F G*,
Fig.185. ha maggior reſiſtenza reſpettiva, che un cilindro egualmente lungo, il cui cerchio foſſe eguale alla detta armilla, cioè il cui raggio *C D* ſia eguale alla perpendicolare *G H*, condotta dal termine della canna interiore *G*, ſopra il diametro; Imperocchè

la

la distanza del centro di gravità della canna *E F*, eguale al raggio *EH*, è maggiore della distanza centrale *CD*, eguale alla perpendicolare *GH*.

PROPOSIZIONE LVIII.

Ne' diversi solidi EBFL, TVRO *la resistenza respettiva del primo a quella del secondo, è in ragione composta di quella delle basi* EBF, TVR, *e delle distanze centrali* CD, IS, *e della reciproca delle loro lunghezze* SO, DL. Fig. 186. 187.

IL peso *G* eguagli la resistenza respettiva del primo solido, ed il peso *N* quella del secondo: sarà *G* alla resistenza assoluta del primo, come *CD* a *DL*, e la resistenza assoluta del primo a quella del secondo, è come la base *EBF* alla base *TVR*, e questa resistenza assoluta del secondo al peso *N*, come *SO* ad *IS*, dunque la ragione di *G* ad *N*, cioè della resistenza respettiva del primo solido a quella del secondo, ha gli antecedenti *EBF*, *CD*, *SO*, ed i conseguenti *TVR*, *IS*, *DL*, dunque è in ragione composta di quella delle basi, e delle distanze centrali direttamente, e reciprocamente della lunghezza di tali solidi. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se le sezioni de' solidi sono triangoli, o rettangoli, o parabole, in cui le distanze del centro di gravità dalla base sono proporzionali alle loro altezze, la proporzione composta della ragione delle sezioni, e delle distanze centrali, potrà dirsi composta delle loro basi, e de' quadrati delle loro altezze, ed essendo ancora simili le figure di esse

se-

ſezioni, eſſendo ancora la ragione delle baſi, eguale a quella delle altezze, ſarà la ſteſſa ragione compoſta delle ſezioni, e delle diſtanze centrali, riplicata di quella delle altezze, onde potrà dirſi, che la reſiſtenza reſpettiva nell' una, alla reſiſtenza reſpettiva nell' altra, ſia in ragione compoſta di quella de' cubi dell' altezze di tali ſezioni ſimili, e della reciproca delle lunghezze de' loro ſolidi.

II. E ſe foſſero ancora i corpi ſolidi ſimili, le cui lunghezze ſarebbero proporzionali alle altezze delle ſezioni ſimili, la ragione reciproca delle lunghezze diminuirà la triplicata delle altezze, cioè de' loro cubi, onde rimarrà la ragione delle reſiſtenze reſpettive ne' corpi ſimili puramente duplicata dalle altezze, o di altri omologhi lati delle ſezioni, cioè come i quadrati di tali linee.

III. Se foſſero ne' due ſolidi le lunghezze proporzionali al prodotto delle ſezioni, e delle diſtanze centrali, ſarebbero le reſiſtenze reſpettive eguali nell' uno, e nell' altro ſolido, perchè le ragioni eguali reciproche compongono la proporzione di egualità; Ed ancora ne' ſolidi egualmente lunghi, ſe foſſero le ſezioni reciproche delle diſtanze centrali, oppure le baſi reciproche de' quadrati delle altezze, quando le ſezioni foſſero parallelogrammi, o triangoli, o parabole di qualunque genere, ſarebbero pure le loro reſiſtenze eguali.

PROPOSIZIONE LIX.

Deſcrivere varj ſolidi, che fiſſi nel muro in qualunque delle loro parallele ſezioni, mantengono ſempre egual reſiſtenza reſpettiva, quantunque la loro lunghezza, ora maggiore rieſca, ora minore, purchè non ſi computi il loro peſo. Pre-

PRefa qualunque figura piana *A B D F* poſta orizzontalmente, ſi aggiunga allo ſteſſo aſſe *A F* un' altra figura verticale *A R H F*, in cui ſia il quadrato dell' ordinata *A R* al quadrato di qualunque ordinata *G H*, in ragione compoſta d' *A F* ad *F G*, e della reciproca delle ordinate *D G*, *A B* in coteſta figura: oppure, data la figura verticale *A R H F*, ſi deſcriva l' altra orizzontale *A B D F*, in cui l' ordinata *A B* all' ordinata *G D* ſia in ragione compoſta di *A F*, ad *F G*, e reciprocamente de' quadrati *G H*, *A R* delle ordinate dell' altra verticale; Se ſi moltiplicherà la figura orizzontale nella verticale, compiendoſi i rettangoli delle ordinate *B A R C*, *D G H E*, ne riuſcirà un ſolido, che in qualunque di tali ſezioni fiſſo nel muro, averà egual reſiſtenza reſpettiva: imperocchè eſſendo il prodotto della ſezione rettangola *B A R C* nella ſua diſtanza centrale dal ſoſtegno, al prodotto dell' altra ſezione rettangola *D G H E* nella ſua diſtanza centrale, che averebbe nel ſoſtegno *G D*, in ragione compoſta del quadrato *A R* al quadrato *G H*, e della larghezza *A B* alla larghezza *G D* (per il Corollario 1. della Propoſizione precedente) ed eſſendo il quadrato *A R* al quadrato *G H* in ragione compoſta di *A F* ad *F G*, e di *G D* ad *A B*, dunque la lunghezza *A F* alla lunghezza *G F*, ſarà in ragione compoſta de' quadrati *A R*, *G H*, e di *A B* a *G D*, e però ſaranno tali lunghezze proporzionali a' prodotti delle ſezioni nelle diſtanze loro centrali, onde le reſiſtenze reſpettive ſaranno eguali nell' uno, e nell' altro ſito, per il Coroll. 3. della Propoſizione precedente.

Tav. XIX. Fig. 188.

Co-

COROLLARI.

Fig 189. I. Quindi il prisma Parabolico fatto dalla Parabola verticale *ARHF*, e dall' Orizzontale rettangolo *FAB*, è un solido, che impegnato nel muro in qualunque sua sezione *ABCR*, *GDEH*, sarà di egual resistenza, come insegnò il Galileo; Imperocchè il quadrato *AR* al quadrato *GH* essendo come *AF*, ad *FG*, ed essendo *GD* eguale ad *AB* la ragione composta di *AF* ad *FG*, e di *DG* ad *AB*, è la medesima che della sola *AF* ad *FG*, cioè de' quadrati delle ordinate *AR*, *GH* nella parabola.

II. Ancora il prisma triangolare *ABFCR*, il cui triangolo è orizzontale, ed il rettangolo verticale, Fig.190. avrà egual resistenza respettiva in qualunque sezione *ABCR*, *GDEH*, come indicò il Sig. Viviani; perchè essendo eguali le ordinate del rettangolo *AR*, *GH*, i loro quadrati sono pure in ragione di *AF* ad *FG*, e di *GD* ad *AB*, che è la stessa di *GF* ad *AF*, onde è ragione di egualità.

Fig.191. III. Una Conoide fatta dalla parabola cubica *FDBA* girata intorno all' asse *AF*, oppure qualunque solido fatto da essa con quadrati, o altre simili figure *ABCR*, *GDEH*, descritte dalle sue ordinate, sarà un corpo di egual resistenza nelle sue sezioni, o circolari, o quadrate, o triangolari &c. fisse nel muro, perchè essendo la figura verticale *ARHF* eguale, o simile all' orizzontale *ABDF*, il cubo *AR* al cubo *GH*, essendo come *AF* ad *FG*, cioè come il cubo *AB* al cubo *GD*, deve essere il quadrato *AR* al quadrato *GH* in ragione composta di *AF* ad *FG*, e della reciproca di *GD* ad *AB*,

per-

perchè alla triplicata di *AB*, e *GD* aggiunta queſta reciproca di *GD* ad *AB*, rimane la ſola duplicata di *AB* a *GD*, che è la ſteſſa del quadrato *AR* al quadrato *GH*.

PROPOSIZIONE LX.

Se il ſolido BEFL *fiſſo nel muro eguagli la ſua reſiſtenza reſpettiva, di manierachè aggiuntole qualunque minimo peſo debba troncarſi, ſarà il ſuo peſo alla di lui reſiſtenza aſſoluta, come* CD, *diſtanza del centro di gravità della ſezione dal ſoſtegno* EF, *alla diſtanza* GC *del centro di gravità* G *di eſſo ſolido dalla medeſima ſezione.* Fig. 192.

IMperocchè congiunta *DG*, ſarà *CDG*, il vette inflеſſo, in cui dal termine *G* tenta di muoverſi il peſo del ſolido per la direzione *GH* parallela a *CD*, e la reſiſtenza aſſoluta trattiene eſſo ſolido per la direzione *GC*, cui tirata la parallela *DH*, comecchè queſte due forze hanno egual momento, dovrà ſtare il peſo del ſolido alla reſiſtenza aſſoluta, cui ſi equilibra, come *CD*, diſtanza del centro della reſiſtenza dal ſoſtegno alla *DH*, ovvero *CG*, diſtanza del peſo dal medeſimo ſoſtegno. Il che &c.

COROLLARI.

I. Fra tutti i ſolidi ſimili *AEL*, *VTO* un ſolo può eſſere quello, che col proprio peſo pareggi la reſiſtenza ſua reſpettiva, perchè eſſendo ſimili le ſezioni *AE*, *VT* le loro diſtanze centrali ſono proporzionali all' altezze, ed alle larghezze, onde il momento della reſiſtenza in *AE*, a quello in Fig. 193. 194.

VT, ſarà in triplicata ragione delle altezze *BE*, *KT*: ma il momento del peſo nel ſolido *AEL*, a quello dell' altro *VTO*, ſarà in ragione quadruplicata delle ſteſſe altezze *BE*, *KT*, per eſſere compoſta di quella de' ſolidi, che è triplicata di *BE* a *KT*, e delle diſtanze *GC*, *HI* de' loro centri di gravità da quelle baſi, che ſono pure proporzionali alle medeſime altezze *BE*, *KT*, dunque ha maggior ragione il momento del peſo del ſolido maggiore *AEL* al momento del minore *VTO*, che il momento della reſiſtenza del primo alla reſiſtenza dell' altro; onde ſe il momento di *AEL* pareggiaſſe la reſiſtenza *AE*, il momento *VTO* ſarebbe minore della reſiſtenza *VT*, e viceverſa ſe il momento *VTO* pareggiaſſe la reſiſtenza *VT*, il momento *AEL* ſarebbe maggiore della reſiſtenza *AR*, dunque un ſolo de' ſimili ſolidi può uguagliare la ſua reſiſtenza reſpettiva.

II. Parimente un ſolo de' ſimili ſolidi, che tiraſſe direttamente col ſuo peſo la ſezione, potrà
Fig. 195. pareggiare la reſiſtenza aſſoluta, eſſendo il peſo di *AEL* a quello di *VTO*, come il cubo *AB* al cubo *KT*, ma la reſiſtenza aſſoluta nella ſezione *AE* a quella dell' altra *VT*, è come il quadrato *AB* al quadrato *KT*, onde ſe il ſolido maggiore eguagliaſſe col ſuo peſo la reſiſtenza aſſoluta, non potrebbe il minore pareggiarla, e ſe il minore eguagliaſſe la ſua reſiſtenza, dovrebbe il maggiore ſuperarla, per eſſere maggiore la ragione de' peſi di quella delle reſiſtenze.

PROPOSIZIONE LXI.

Trovare infiniti ſolidi, che ſporgendo fuori del muro

muro abbiano le reſiſtenze reſpettive ſempre proporzionali a' momenti de' loro peſi; onde ſe il peſo di uno eguagliaſse la reſiſtenza della ſua baſe, ancora il peſo di qualunque altra ſua porzione eguagli la reſiſtenza della propria baſe.

POſto verticale il trilineo parabolico *CEFB*, di cui è tangente la orizzontale *FB*, ſi aggiunga alla ſteſſa *FB* in ſito orizzontale il parallelogrammo *FBA*, o il triangolo *FAB*, o qualunque parabola *FGAB* di qualſivoglia genere, indi moltiplicata una figura con l'altra ne rieſca il ſolido *ABFCR*, ſarà il momento del peſo di queſto al momento del peſo di qualunque altra porzione *GDFEH* tagliata col piano *DH*, parallelo al piano *BR*, come il momento della reſiſtenza *BARC* al momento dell' altra parallela ſezione *DGHE*. Imperocchè quando l' orizzontale è un rettangolo *ABF*, il momento della reſiſtenza della ſezione *ABCR* a quello della reſiſtenza *GDEH*, ſarà come il quadrato *BC* al quadrato *DE*, eſſendo le loro centrali diſtanze, come le altezze, e le larghezze eguali: ma il momento del peſo del primo ſolido *ABFCR*, al momento del peſo del ſecondo *GDFEH*, eſſendo in ragione compoſta di *BC* a *DE*, e del quadrato *BF*, al quadrato *FD*, i quali ſono pure come le altezze *CB*, *DE*, dunque i momenti delle reſiſtenze ſono proporzionali a' momenti de' peſi di tali ſolidi; onde ſe il cuneo *ABFCR* col proprio peſo eguaglia la reſiſtenza reſpettiva della ſua baſe *AC*, ancora il cuneo *GDFEH*, dovrà pareggiare la reſiſtenza della ſua baſe *GE*; e qualunque altra figura Fig. 196 197

orizzontale moltiplicandoſi col verticale trilineo parabolico, non eſſendo più eguale la larghezza delle ſezioni *AC*, *GE*, ſarà il momento della reſiſtenza nella prima a quello nella ſeconda, in ragione compoſta del quadrato *BC* al quadrato *DE*, e della larghezza *AB* all' altra *GD*; ed eſſendo queſti ſolidi *ABFCR*, *GDFEH* proporzionali a' parallelepipedi eretti ſopra le ſteſſe ſezioni *AC*, *GE* nelle loro lunghezze *BF*, *DF*, averanno ancora la diſtanza de' loro centri di gravità delle ſue baſi proporzionali a dette lunghezze, onde il momento del peſo nel primo ſolido al momento nel ſecondo, ſarà in ragione compoſta delle ſezioni *AC*, *GE*, e de' quadrati delle lunghezze *BF*, *DF*, i quali ſono come l' altezze *BC*, *DE*: dunque ancora eſſi momenti ſono in ragione compoſta de' quadrati *BC*, *DE*, e delle larghezze *AB*, *GD*, e però ſono proporzionali a' momenti delle reſiſtenze nelle loro baſi; onde ſe uno di detti peſi eguaglia la ſua reſiſtenza reſpettiva, ancora l' altro pareggerà la ſua reſiſtenza corriſpondente. Il che &c.

COROLLARI.

Fig. 198. I. Se ſi faceſſe girare il medeſimo trilineo parabolico intorno alla ſua tangente *FB*, onde riſulterebbe il ſolido rotondo *CEFHR* ſimile allo ſpazio d'una tromba, averà pure le reſiſtenze reſpettive proporzionali a' momenti de' peſi delle ſue porzioni, eſſendo il momento della reſiſtenza *CR* a quello della reſiſtenza *EH* in ragione compoſta di tali ſezioni circolari, e de' loro raggi *BC*, *DE*, come de' quadrati *BF*, *DF*, della qual ragione ſi compongono ancora i momenti da' peſi di eſſi ſolidi,

lidi, essendo ancor essi in ragione composta delle basi suddette circolari, e de' quadrati delle lunghezze *B F*, *D F*, proporzionali a' raggi *B C*, *D E*.

II. Se dell' ordinate *BC*, *DE* di questo trilineo parabolico si facessero pure da per tutto quadrati, o simili triangoli, o altri poligoni simili, ne riuscirà parimente un solido, le cui porzioni, col loro peso, potranno avere egual resistenza.

PROPOSIZIONE LXII.

Il solido cilindrico, o prismatico A F L G, *sostenuto in* D, *abbia i pesi* P, H *pendenti dagli estremi, e da essi si equilibri la di lui resistenza, essendo i massimi, che possa reggere senza rottura. E lo stesso solido posato nell' altro sostegno* B, *abbia ivi parimente la sua resistenza equilibrata da' pesi* M, N, *attaccati ne' medesimi termini* L, F, *sarà la somma de' primi pesi* P, H *a quella degli altri due* M, N, *come reciprocamente il rettangolo* L B F *al rettangolo* L D F, *prescindendo però dal peso di esso solido.* Tavola XX. Fig. 199.

IMperocchè essendo tutti questi pesi di egual momento, sarà *P* ad *H*, come *F D* a *D L*, e componendo la somma di *P*, ed *H* sarà ad *H*, come *F L* a *D L*; ma *H* ad *N* è come *F B* a *D F*, ed *N* alla somma de' due *M*, *N*, come *L B* ad *F L*; dunque la somma di *P*, ed *H* alla somma di *M*, ed *N*, è in ragione composta di *F L* a *D L*, di *F B* a *D F*, e di *L B* ad *F L*, onde di quà, e di là togliendo *F L*, che è un antecedente eguale ad un conseguente, resta, che la somma di *P*, ed *H* a quella di *M*, ed *N* sia come il rettangolo *L B F*, all' altro *L D F*. Il che &c.

COROLLARI.

I. Dunque le reſiſtenze reſpettive in *D*, e in *B*, pareggiate dalle ſomme di que' peſi, ſaranno anch' eſſe reciprocamente come i detti rettangoli *LBF*, *LDF*.

II. Onde la minima reſiſtenza di tal ſolido ſarà nel mezzo, perchè la reſiſtenza in *D* a quella in *B* (ſe foſſe *D* nel mezzo, di manierachè *LDF*, ſarebbe il quadrato della *DF*, metà di tutta la lunghezza *FL*) ſarà come il rettangolo *LBF* al quadrato *DF*, che è maggiore di eſſo.

Fig.200. III. La ſcala di tali reſiſtenze di un ſolido cilindrico, o priſmatico *FL* di eguale groſſezza, ſarà la figura *FQNPL* reciproca della parabola *FHNL* eretta ſopra la baſe della lunghezza di tal ſolido; Imperocchè, eſſendo la reſiſtenza nel mezzo *D* a quella in un' altro punto *B*, come il rettangolo *LBF* al quadrato *DF*, ed eſſendo queſti come le rette *HB*, *DN* diametri di eſſa parabola, facendo come *BH* a *DN*, così la ſteſſa *DN* alla *BM*, ne riuſcirà quella curva *NM*, in cui la reſiſtenza della ſezione in *D*, alla reſiſtenza dell' altra in *B*, ſarà come *DN* a *BM*; onde ſarà fatta la ſcala di tali reſiſtenze, come accennò il Sig. Viviani.

PROPOSIZIONE LXIII.

Fig.201. *Se il priſma, o cilindro* AB *ſoſtenuto nel mezzo in* D, *ſarà di tanta lunghezza, che il peſo delle proprie ſue parti eguali* AD, DB *pareggi la ſua reſiſtenza* CD, *di manierachè con un minimo peſo aggiunto poteſſe troncarſi, preſo un' altro priſma, o cilindro* MN *egualmente groſſo, ma di lunghezza media*

dia proporzionale fra tutta la AB, *e la ſua metà* AD, *il quale ſia ſoſtenuto ne' ſuoi eſtremi* M, N, *ſarà il momento di queſto ſuo peſo parimente eguale alla reſiſtenza della ſua media ſezione* PQ *eguale all' altra* DC.

IMperocchè eſſendo la metà del peſo *AB*, cioè la porzione *AC*, applicata nel ſuo centro di gravità nella ſezione *EG*, che divide per mezzo la lunghezza *AC*, e l' altra metà di peſo, cioè *BC* nel centro della ſezione *HF*, che divide per mezzo l' altra parte *CB*, gli quali peſi col loro momento fanno forza alla reſiſtenza della ſezione *CD*; Similmente reggendoſi dal ſoſtegno *M*, la metà di quell' altro ſolido *MP*, e l' altra metà *NP* dal ſoſtegno *N* con le diſtanze *QM*, *QN*, le quali pure ſaranno medie proporzionali fra le lunghezze *AC*, *CE*, ſiccome l' intera *MN*, ſi è ſuppoſta media proporzionale fra tutta la *AB*, e la metà *AC*, dunque il peſo *AC* al peſo *MP* ſarà pure reciprocamente, come la diſtanza *QM* alla diſtanza *GD*, dalle quali eſſi peſi vi pendono, e però ſaranno eguali i loro momenti, e lo ſteſſo può dirſi dell' altre due metà d' ambi i peſi applicate ſimilmente a rompere le eguali reſiſtenze *DC*, *QP*; dunque ha la ſteſſa forza il cilindro, o priſma *AB* ſopra la reſiſtenza della ſezione *CD*, come il cilindro *MN*, ſopra la reſiſtenza dell' eguale ſezione *QP*.

PROPOSIZIONE LXIV.

Nel ſolido LBFM *retto fra due ſoſtegni ne' ſuoi termini L, F, le reſiſtenze ne' ſiti* R, D, *ſono in ragione compoſta della ſezione* RTO, *all' altra* DBM, Fig. 202.

o delle loro centrali diſtanze PR, QD, e *della reciproca de' rettangoli* LDF, LRF.

IMperocchè ſe vi foſſe parimente ſoſtenuto un prisma *FGHNA* di eguale lunghezza, le cui ſezioni foſſero eguali ad una di quelle *BDM*, che nel ſito *R*, ſarebbe *REK*, la reſiſtenza di *RTO* a quella di *REK*, ſarebbe come il prodotto di tali ſezioni nelle diſtanze *PR*, ed *SR*, la quale è eguale a *QD*: ma la reſiſtenza di *REK* a quella di *DBM*, (per il Coroll. 1. della Propoſ. 62.) è reciprocamente come il rettangolo *FDL* al rettangolo *FRL*, dunque la reſiſtenza di *RTO* a quella di *BDM* è in ragione compoſta di tali ſezioni, e delle loro diſtanze centrali, e della reciproca di que' rettangoli. Il che &c.

COROLLARI.

I. Le reſiſtenze di tali ſolidi ſoſtenuti ne' ſuoi eſtremi, ſaranno eguali in qualunque ſito, quando i prodotti di ciaſcuna ſezione nella ſua diſtanza centrale ſaranno proporzionali a' rettangoli delle parti della lunghezza del ſolido diviſa da tali ſezioni. Imperocchè la ragione compoſta di queſti prodotti, e della reciproca de' medeſimi rettangoli ſarà ragione di egualità.

II. E ſe tali ſezioni ſaranno parallelogrammi, o triangoli, o parabole, le cui diſtanze centrali ſarebbero proporzionali alle loro altezze, allora i prodotti del quadrato delle altezze, e delle baſi di tali ſezioni ſaranno proporzionali a detti rettangoli.

Fig. 203. III. Se ſarà qualunque figura *FBL* poſta verti-

ticalmente, e gli si connetta un orizzontale figura *FOL*, in cui sia come una data linea *FG* a qualunque ordinata *RO*, così il quadrato dell'ordinata *RI* nella figura verticale, al rettangolo *LRF*, riuscirà il solido composto di queste due figure, le cui ordinate faccino tanti parallelogrammi, o triangoli, o parabole, di resistenza eguale in qualunque sito, perchè il prodotto del quadrato *IR* nella base della sezione *RO*, essendo eguale al prodotto della data *FG*, nel rettangolo *LRF*, sarà da per tutto il prodotto de' quadrati dell' altezze nelle basi delle loro sezioni, proporzionale al suo corrispondente rettangolo.

IV. Se *FBL* sia un semicircolo, o una semiellisse verticale, sarà la figura orizzontale *FHNL* un parallelogrammo, le cui larghezze sempre eguali, e però sempre proporzionali alla data retta *FG*, come il quadrato *RI* nel semicircolo eguaglia il rettangolo *FRL*, ed il quadrato *BD* eguaglia l'altro rettangolo *FDL*, e nella semiellisse sono quei quadrati sempre proporzionali a detti rettangoli, onde questo solido averà eguale resistenza in qualunque sezione, come dimostrò il Viviani, e poscia il Blondello, ed indi il Sig. Alessandro Marchetti. Fig. 204.

V. Anzi potrebbe farsi una volta compresa da due archi *FAL*, *FBL* ambidue ellittici, o pure uno di essi semicircolare, ed averebbe nelle sue grossezze *AB*, *IE* eguale resistenza, essendo quelle stesse le differenze delle sezioni maggiori *AD*, *IR*, dalle minori *BD*, *ER*, le quali con eguale larghezza sono egualmente resistenti in ciaschedun semicircolo, o semiellisse. Fig. 205.

VI.

VI. Se poi foſſe la figura verticale il parallelo-
Fig.206. grammo *ALFG*, e l'orizzontale una parabola *FML* deſcritta ſopra la baſe *FL*, ſarebbe pure il ſolido da queſte due figure compoſto di eguale reſiſtenza, come deve intenderſi ciò, che ne dice il Galileo, benchè da alcuni in ciò rifiutato, credendo, che la parabola doveſſe eſſere verticale; imperocchè certamente le linee *RO*, *DM*, baſi delle ſezioni di queſto ſolido, eſſendo come i rettangoli *FRL*, *FDL*, ſaranno pure eſſe baſi moltiplicate per gli quadrati eguali *IR*, *BD*, proporzionali a detti rettangoli.

Fig.207. VII. Fatto ancora un triangolo orizzontale *FHL*, di cui la baſe *FH* ſuppongaſi eguale alla data *FG*, deſcritta col diametro *FL*, eguale al ſuo lato retto, la parabola *FIA*, e compiuti i rettangoli delle ordinate di queſte due figure, ne riuſcirà un cuneo parabolico di eguale reſiſtenza in qualunque ſezione *IROE*, perchè come ſta *FG*, ovvero *FH* ad *RO*, cioè *FL* ad *RL*, così ſta il rettangolo *LFR* al rettangolo *FRL*, e però il quadrato *IR* eſſendo eguale al rettangolo *LFR*, ſta al rettangolo *FRL*, come la data linea ad *RO*.

PROPOSIZIONE LXV.

Fig.203. *Dato un cilindro* ABDF, *in cui il momento del ſuo peſo eguagli il momento della ſua reſiſtenza, o eſſendo fitto nella parete in uno de' ſuoi eſtremi, o pure ne' ſuoi termini retto da due ſoſtegni, ritrovarne altri innumerabili, che abbiano la medeſima proprietà.*

Si

SI faccia la parabola *GACFI* in cui l' abſciſſa del diametro *CE* eguagli il diametro del dato cilindro, e l' intera ordinata *AF* ne eguagli la lunghezza; tirando in qualſivoglia altro ſito per un punto *H* del diametro un' altra ordinata *GI*, s' intenda un' altro cilindro di queſta lunghezza *GI*, il cui diametro del circolo ſia eguale all' abſciſſa *CH*, queſto pure averà il momento del ſuo peſo eguale al momento delle reſiſtenze, come ſi ſuppone lo aveſſe il dato cilindro *ABDF*, Imperocchè il momento del peſo nel primo *ABDF* a quello del ſecondo *KGIL*, è in ragion compoſta di eſſi ſolidi, e delle loro lunghezze; ma eſſi ſolidi ſono in ragion compoſta delle baſi circolari, cioè de' quadrati *CE*, *CH*, e delle loro lunghezze, dunque eſſi momenti de' peſi ſaranno in ragion compoſta del quadrato *CE* al quadrato *CH*, e del quadrato della lunghezza *AF* al quadrato *GI*, oppure del quadrato *AE* al quadrato *GH*, i quali ſono come *CE* a *CH* ancor eſſi; dunque tali momenti de' peſi ſono come il cubo *CE* al cubo *CH*: ma ancora i momenti della reſiſtenza di tali ſezioni, eſſendo come i quadrati de' diametri circolari moltiplicati per le centrali diſtanze, proporzionali pure à' medeſimi diametri, ſono come gli ſteſſi cubi *CE*, *CH*, dunque i momenti de' peſi ſono proporzionali a' momenti delle reſiſtenze, onde ſiccome nel primo ſolido il momento del peſo eguaglia quello della reſiſtenza, lo ſteſſo riuſcirà nel ſecondo, ed in qualunque altro ſimilmente deſcritto con la lunghezza di qualſivoglia ordinata della parabola, e col diametro del ſuo circolo eguale all' abſciſſa. Il che &c.

Co-

COROLLARIO.

Lo ſteſſo rieſce ne' priſmi, ne' coni, e nelle piramidi, le cui lunghezze ſiano come tali ordinate della parabola, e le ſezioni ſimili abbiano in ſimile ſito l' altezze eguali all' abſciſſe del diametro di eſſa parabola.

AVVERTIMENTO.

MOlte altre proprietà appartenenti a queſta materia poſſono oſſervarſi in un mio libro di riſpoſta Apologetica, ſiccome ancora ne' Comentarj da mè fatti al trattato di reſiſtenza del Viviani, e nell' Appendice ivi da me aggiunte, le quali non occorre quì più rimettere.

Solamente parmi bene avvertire in primo luogo, che un priſma, o cilindro poſto ſopra due ſoſtegni, di cui ſi è fin' ora diſcorſo, ha molto minor reſiſtenza, che ſe ne' ſuoi termini foſſe fitto in due muri: perchè nel primo caſo, ſe la propria gravità, o un peſo attaccatogli nel mezzo, può tirarlo in giù, con rompere la ſua ſezione, dove ha il ſuo centro di gravità, cioè appunto nel mezzo; nel ſecondo caſo biſognerà eſſervi tanto peſo, che oltre il rompere la ſezione del ſolido nel mezzo, ne rompa ancora le altre due ſezioni fiſſe in ambi i muri, cioè verſo i ſuoi termini, non potendo queſti alzarſi liberamente, e ſegarſi ſolo quella di mezzo, perchè in tal caſo non ſono ſolamente appoggiati a' ſoſtegni, ma racchiuſi nel muro.

In

In ſecondo luogo ſi oſſervi, eſſerſi qui ſuppoſto, come ha fatto il celebre Galileo, che le ſezioni per cui ſi ſchiantano i ſolidi ſiſſi nel muro, o attaccati in due ſoſtegni, non ſiano compoſte di tali fibre, che nella rottura ſi debbono dilatare, altre più, altre meno, ſecondo che ſono più lontane, o più proſſime al loro appoggio, come poſcia ha dimoſtrato il Sig. Mariotte nel ſuo trattato de' Movimenti dell' Acque, *part.* 5. *diſc.* 2. Il che da molti altri Autori è ſtato approvato; Imperocchè non ſi rompe qualunque ſolido tutto in un tratto, ſcorgendoſi, che ogni baſtoncello ſi piega prima di romperſi; dal che eſſo Mariotte ne ricava non eſſer vero il detto dal Galileo, che il peſo, tirando un ſolido rettangolo direttamente, con direzione perpendicolare alla ſua baſe fitta nel muro, ſtia al peſo, che attaccato al termine della lunghezza del medeſimo ſolido, lo tiraſſe in giù, con direzione perpendicolare all' orizzonte, ſtia, come la lunghezza di eſſo ſolido, alla metà dell' altezza di eſſa ſezione fiſſa nel muro, che è la diſtanza del di lei centro dal ſoſtegno, ma piuttoſto, dover eſſere quel peſo a queſt' altro, come la detta lunghezza del ſolido, alla quarta, o alla terza parte dell' altezza della ſua frazione; il che ancora dal Leibnizio, e dal Signor Warignone ſi ſuole dimoſtrare; ma la diverſa condizione di varie materie, in alcuni ſolidi può far riuſcire maggiore, o minore la propoſizione di tali peſi, che corriſpondono alla proporzione delle due reſiſtenze aſſoluta, e reſpettiva di qualunque ſolido da eſſi peſi reppreſſe.

Ciò può dedurſi ancora dal paragone del peſo,

ſo, che poſſa rompere un ſolido cilindrico, o priſmatico fitto nel muro, con quello, che lo ſtrapperebbe appoggiato il medeſimo, co' ſuoi termini, ſopra due ſoſtegni. Vi è chi pretende nel primo caſo dover eſſere il peſo attaccato all' eſtremo termine del ſolido fitto nel muro, la metà dell' altro peſo, nel ſecondo caſo appiccato al mezzo della lunghezza del medeſimo ſolido, ſoſtenuto in ambidue gli ſuoi termini. Ma nella mia Riſpoſta Apologetica fu dimoſtrato, dover eſſere queſto non ſolamente doppio di quello, ma quadruplo: anzi ſe il ſolido foſſe fitto eſattamente co' ſuoi termini in due muri, e non ſolamente ſoprappoſto a due ſoſtegni dovrebbe eſſere il peſo, che lo rompeſſe, almeno ottuplo di quello, che attaccato nell' ultimo termine doveſſe rompere eſſo ſolido fiſſo unicamente con il primo termine nel muro, variandoſi però tali proporzioni ſecondo la diverſa materia de' ſolidi, conneſſi con fibre di varia forza; onde ſi ſono fatte molte ſperienze, in cui il peſo attaccato al mezzo del ſolido ſemplicemente appoggiato a due ſoſtegni, ora ſi trovò alquanto minore, ora alquanto maggiore del quadruplo di quello, che era attaccato al termine del medeſimo ſolido applicato ſolamente con l' altro termine nel muro.

Il Signor Marcheſe Poleni degniſſimo Profeſſore di Mattematica nello Studio di Padova, mi mandò le ſeguenti ſperienze da lui fatte, e ne regiſtrerò quì le ſue medeſime parole, che ſono le ſeguenti. *Preſi un Priſma di legno d' Abete lungo piedi* $2\frac{1}{2}$ (*il quale moſtrava tutte le condizioni, che poſſono far credere un eguale reſiſtenza in cadauna fibra*)

di

di baſe quadrata. Era il lato della baſe linee 8. *cioè* $\frac{8}{12}$ *di pollice; ed era di due piedi la diſtanza dal punto primo fuori del muro, in cui il Priſma era fitto, al punto, in cui ſtava attaccata una lance, nella quale ſi andava creſcendo il peſo, mezz' oncia per volta: ſi ruppe queſto legno in vicinanza del muro, con libbre* 16. *oncie* 7. *di peſo. Riposi dopo il reſtante Priſma ſopra due fulcimenti, in maniera, che la diſtanza tra quelli foſſe pure di due piedi: poi poſto nella lance, attaccata nel mezzo, il peſo (che nella maniera di prima ſi andava creſcendo) ſi ruppe il Priſma con libbre* 62. *e oncie* 2. *di peſo.*

Un Cilindro di cera fitto nel muro, il diametro della di cui baſe era linee 7. *la lunghezza dal muro al peſo attaccato, era d' un piede, ſi ruppe col peſo di una libbra, e oncie* 2. *Poſto con l' eſtremità ſopra due fuſcimenti, diſtanti pure d' un piede, ſi ruppe col peſo di libbre* 5. *e oncie* 4.

Un altro Cilindro di cera fitto nel muro, il diametro della di cui baſe era d' un pollice, ed il peſo gli era attaccato in diſtanza di pollici 7. *ſi ruppe col peſo di libbre* 8. *e oncie* 7. *poſto ſopra due fulcimenti, li quali avevano la ſteſſa diſtanza, ſi ruppe col peſo di libbre* 36.

Un Cilindro di vetro colorato, il diametro della di cui baſe era 3. *linee, fitto nel muro, e poſto il peſo in diſtanza d' un piede, ſi ruppe col peſo di libbre una, e oncie* 7. *ſopra due fulcimenti nella medeſima diſtanza, ſi ruppe col peſo di libbre* 6. *e oncie* 9.

Un cannello di vetro perforato (come quelli de' barometri) di 3. *linee in circa di groſſezza, fitto con una eſtremità nel muro, e poſto il peſo in di-*

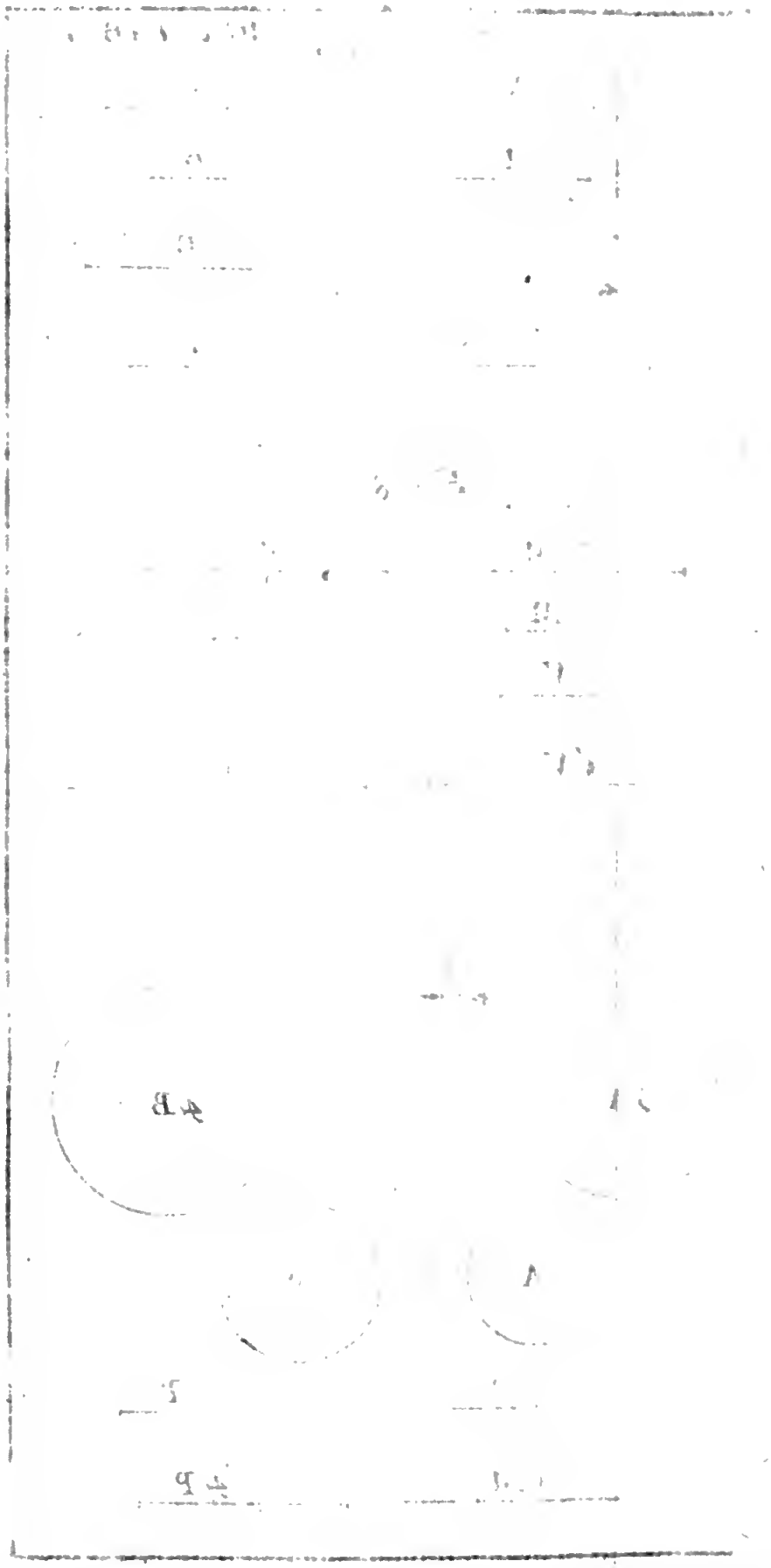
ſtanza

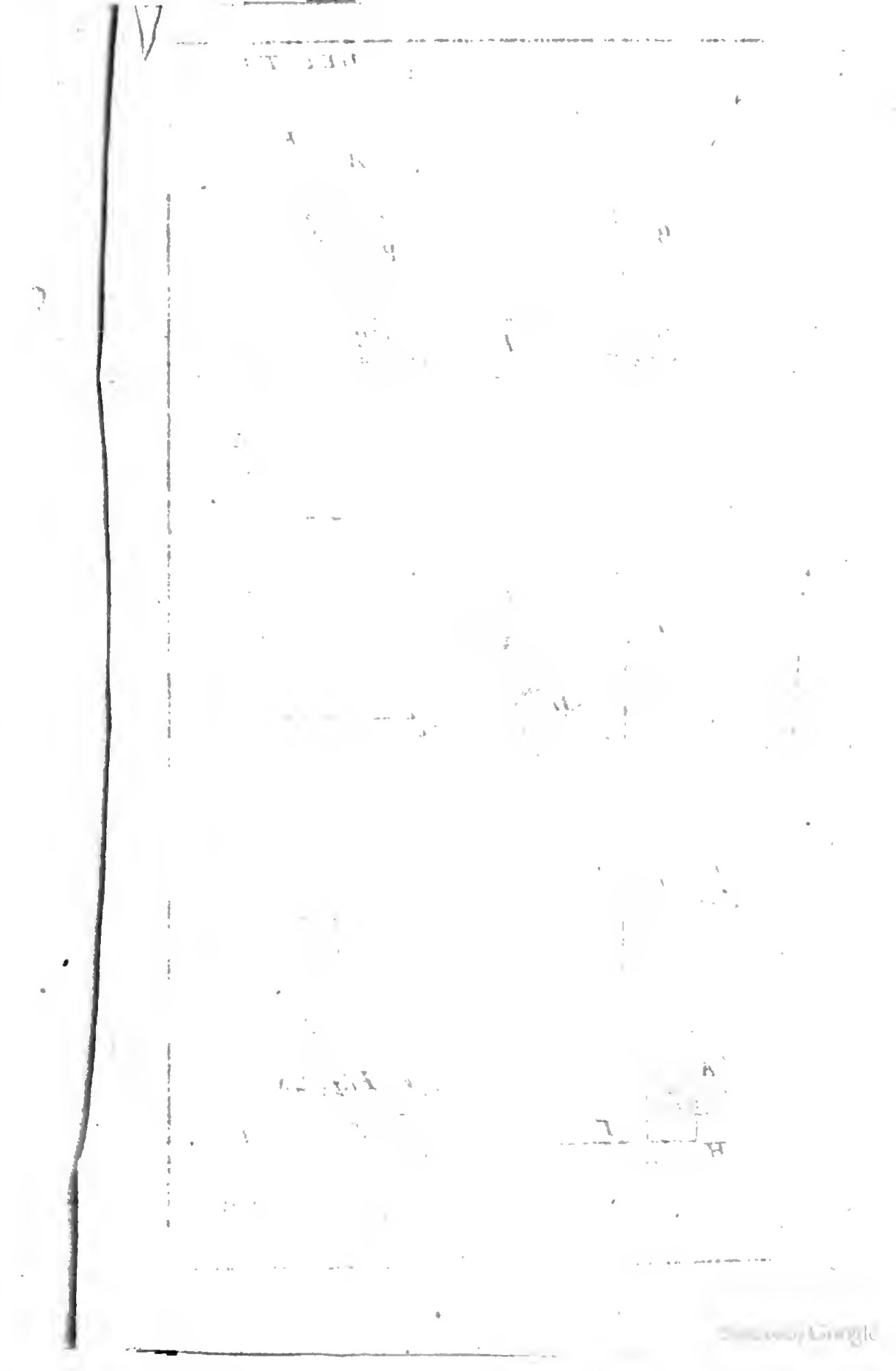
ſtanza d' un piede, ſi ruppe col peſo di libbre 2.; *poſto ſopra due appoggi, i quali avevano la ſteſſa diſtanza, ſi ruppe col peſo di libbre* 9. *e oncie* 2.

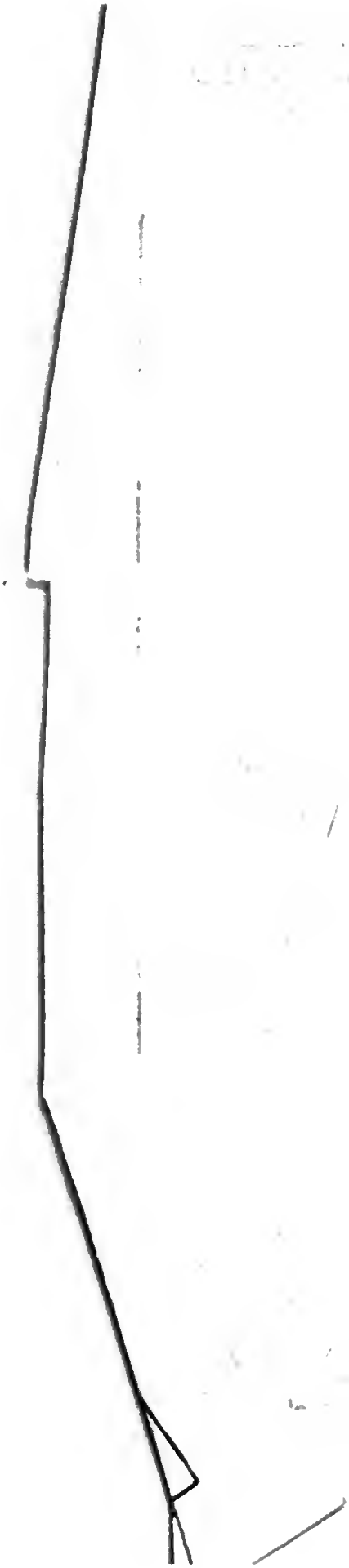
Più altre eſperienze ho fatto, ma queſte baſtano per indicarci (*avendo anche riguardo al peſo de' Cilindri*) *che la proporzione de' peſi ne' caſi ſuppoſti è ſempre vicina alla proporzione di* 1. *a* 4. *Ho però oſſervato, che per lo più il peſo attaccato al mezzo del Priſma, o Cilindro, e di qualche coſa maggiore del quadruplo del peſo attaccato all' eſtremità del Priſma, o Cilindro fitto nel muro: e mi ha fatto oſſervare ciò più diligentemente il vedere, che queſto accreſcimento, e più certo ne' corpi di maggior reſiſtenza, che in quelli di reſiſtenza minore.*

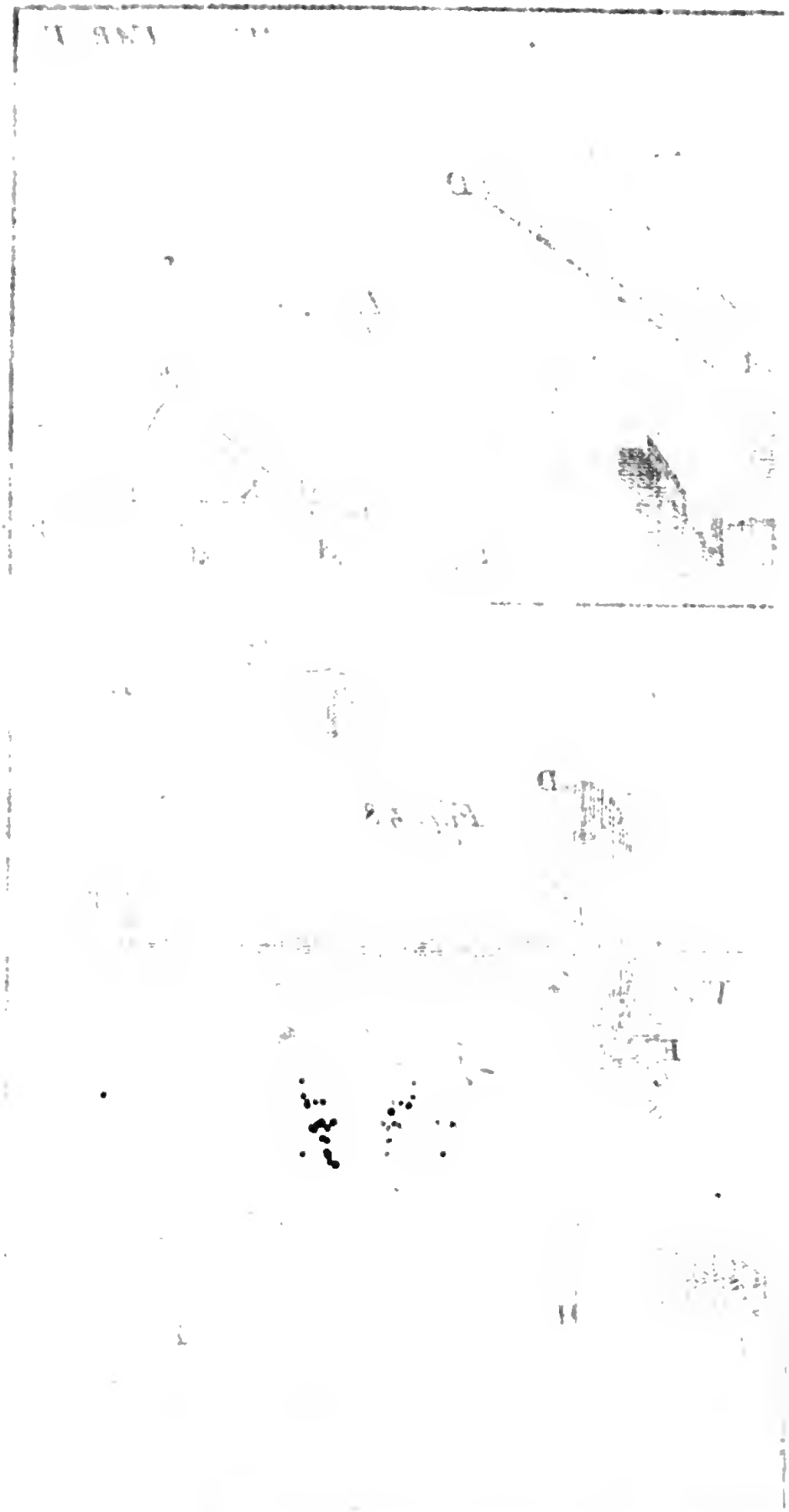
Sarei troppo lungo, ſe aggiunger voleſſe a queſte altre ſimili ſperienze, da me fatte quì in Piſa, ed altrove ancora da' miei Amici: però credo ci baſtino le già addotte, onde quì rimane queſto Trattato.

IL FINE.









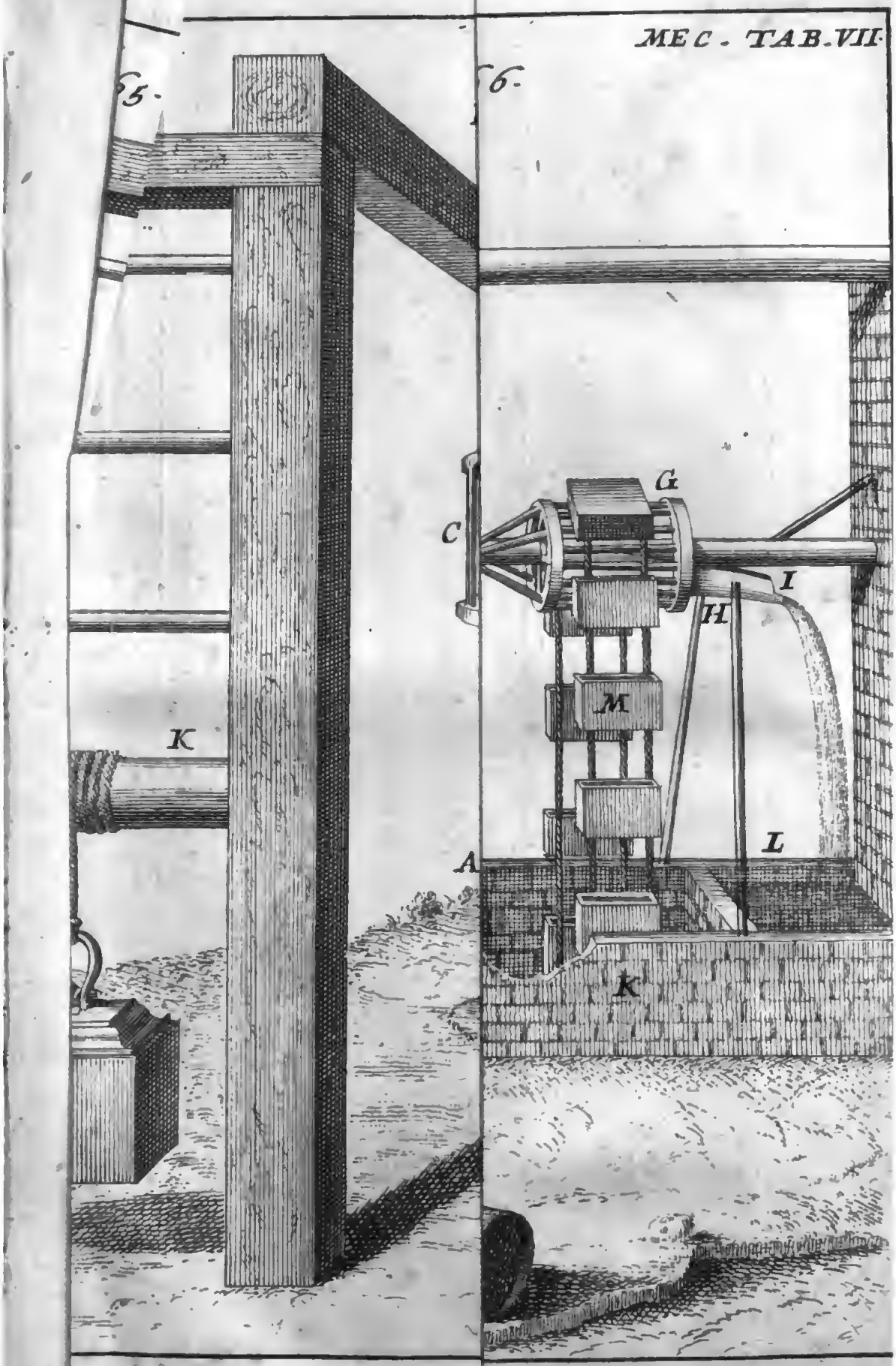

5.
6.
G
C
I
H
M
K
L
A
K

Fig. 67.

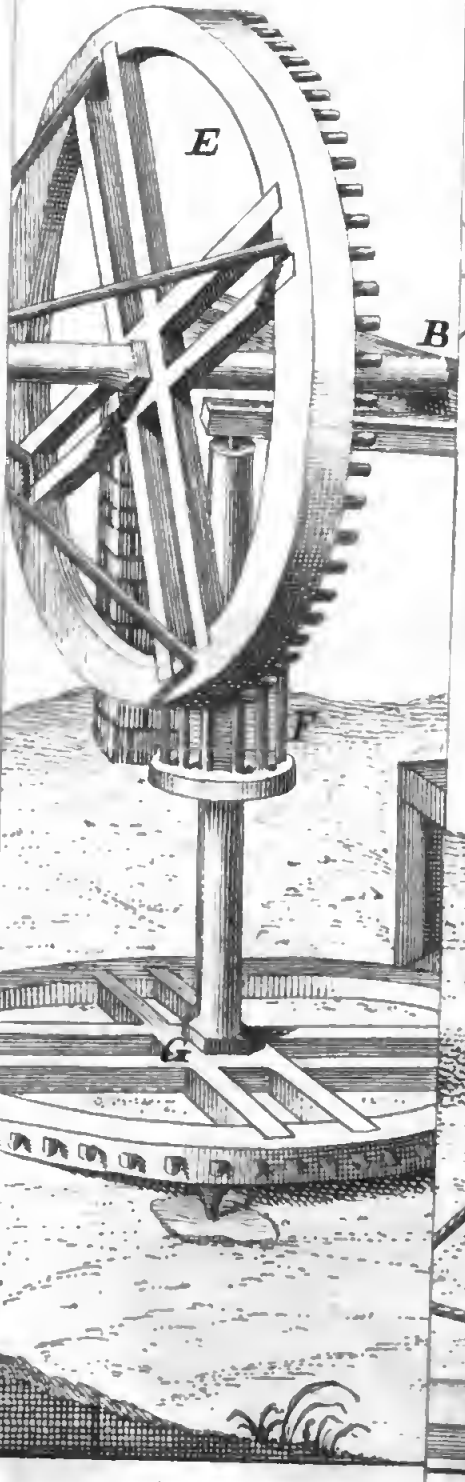


Fig. 71.

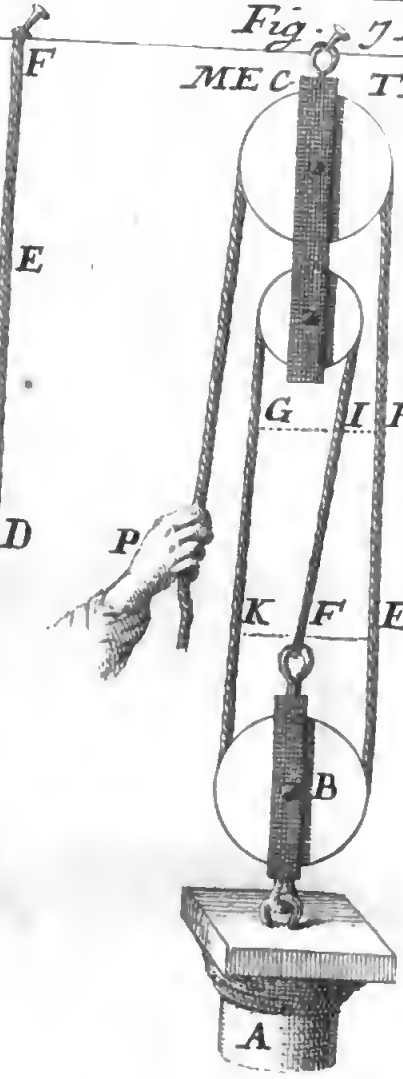
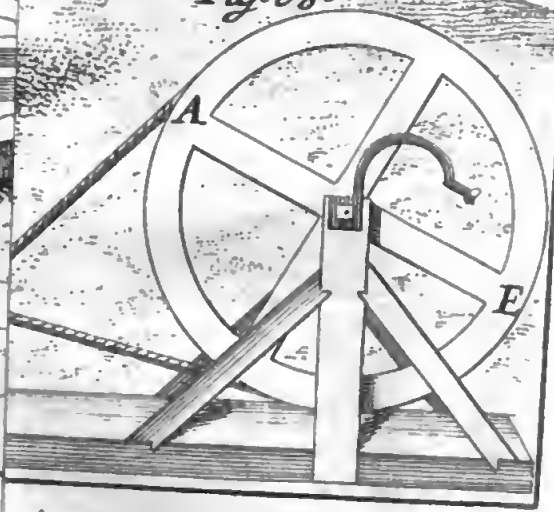


Fig. 68.



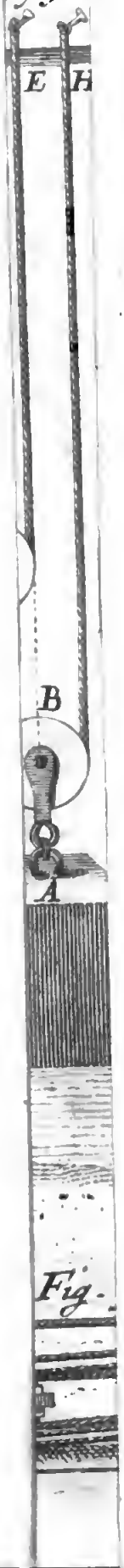


Fig.

Fig. 79.

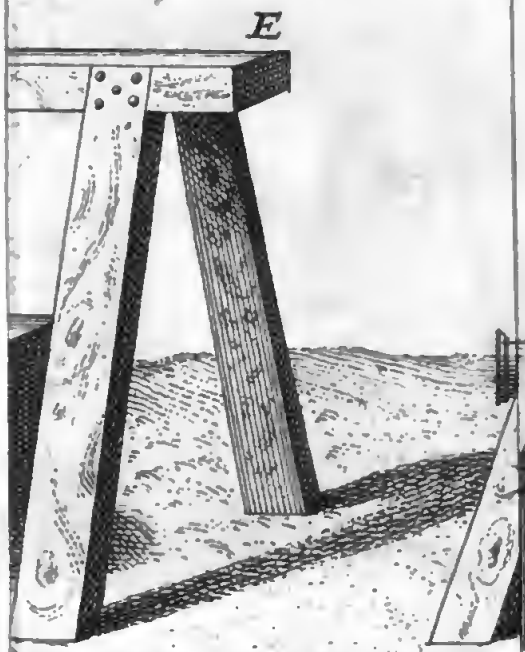
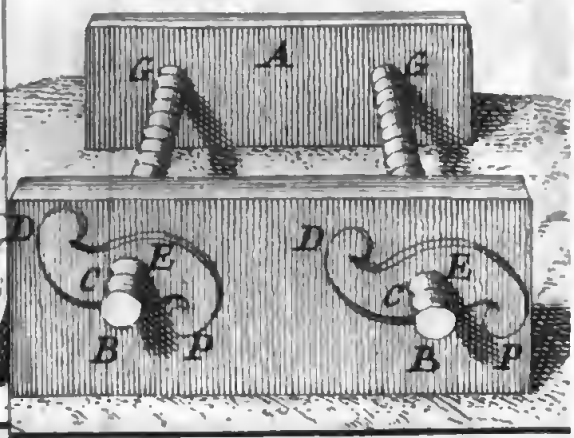
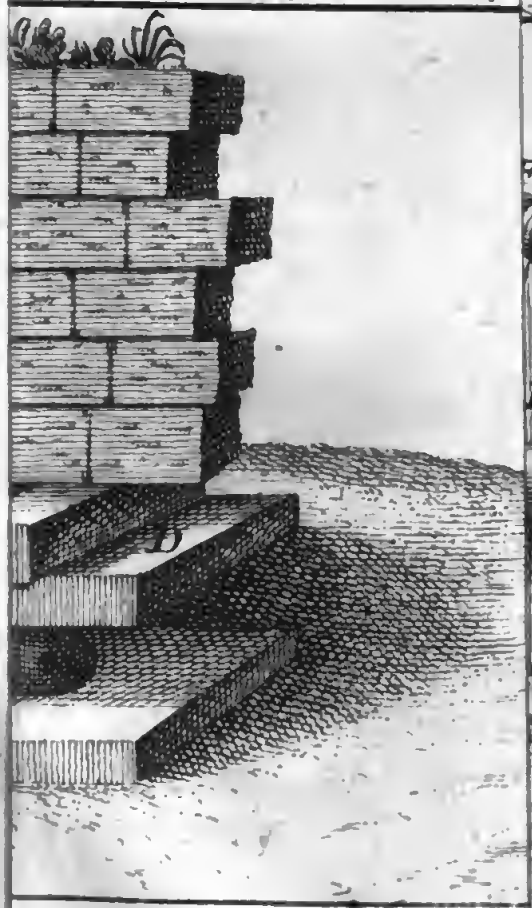


Fig. 81.





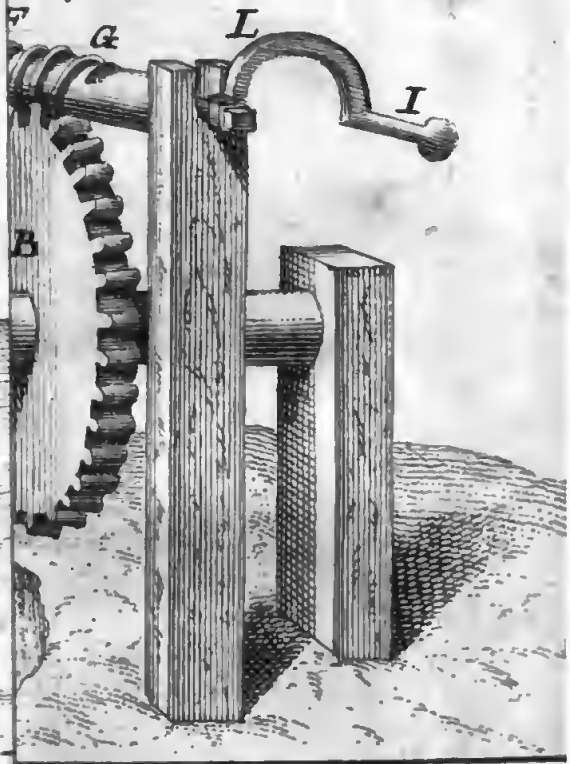


Fig. 84.

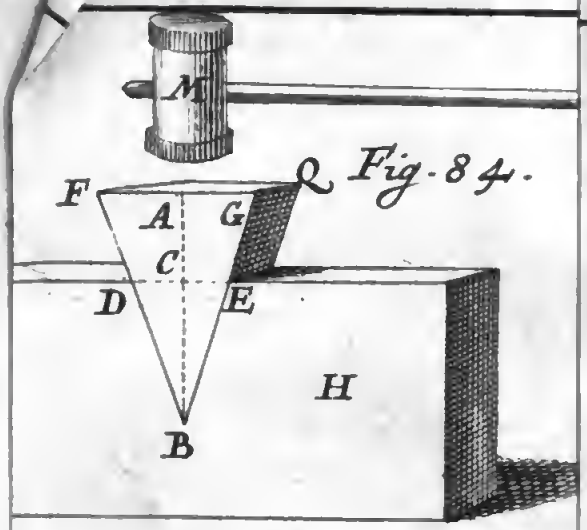


Fig. 86.

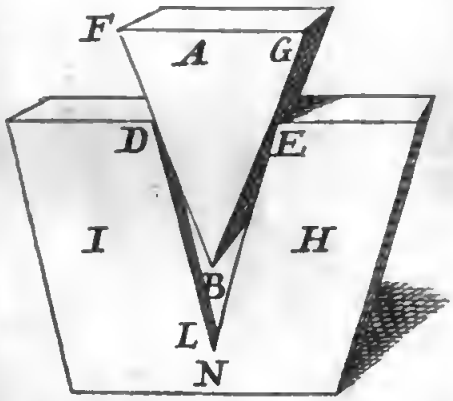


Fig. 89.

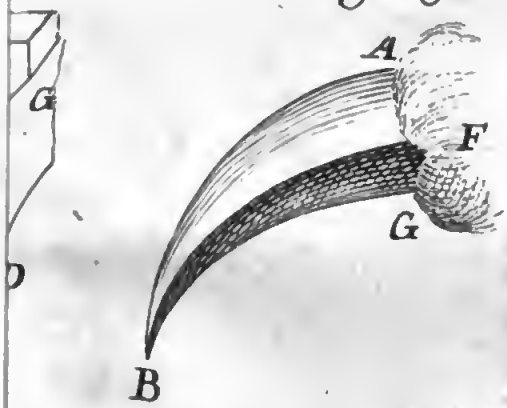


Fig. 91.

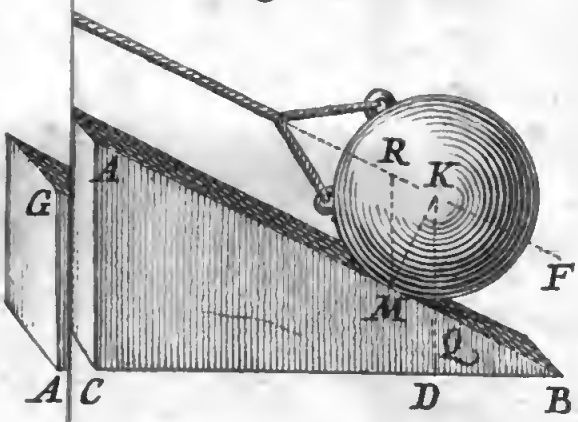


Fig. 93.

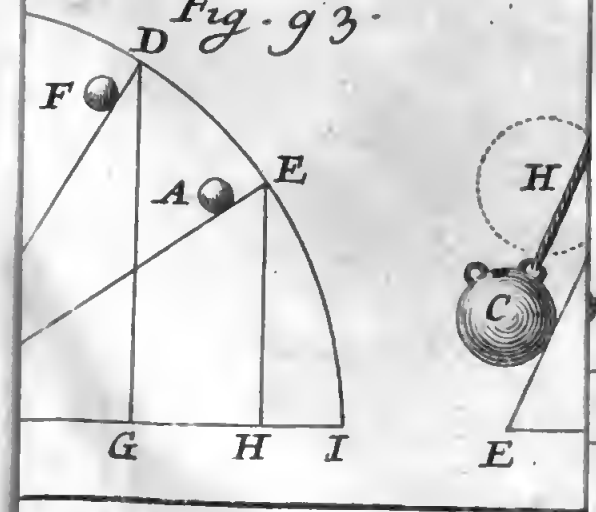


Fig. 95.

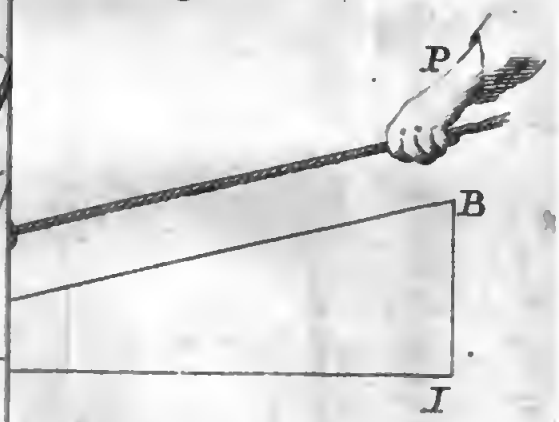


Fig. 97.

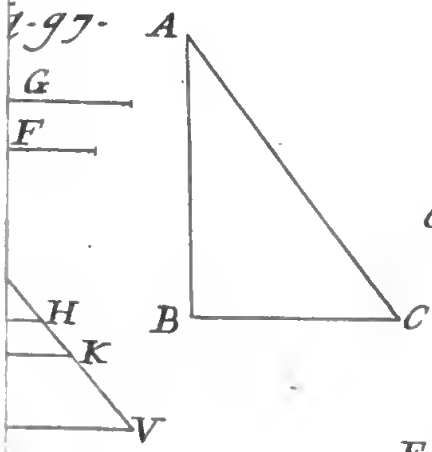


Fig. 99.

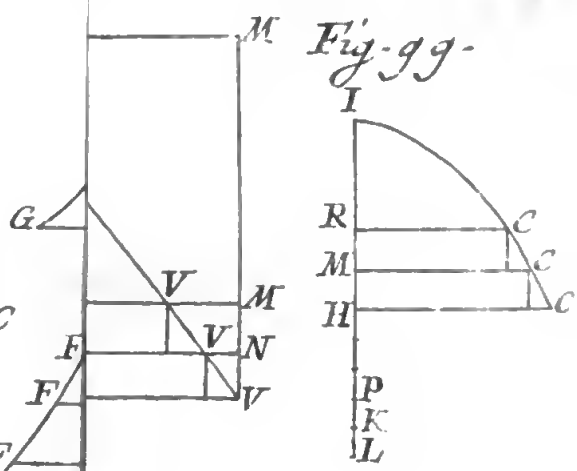


Fig. 103.

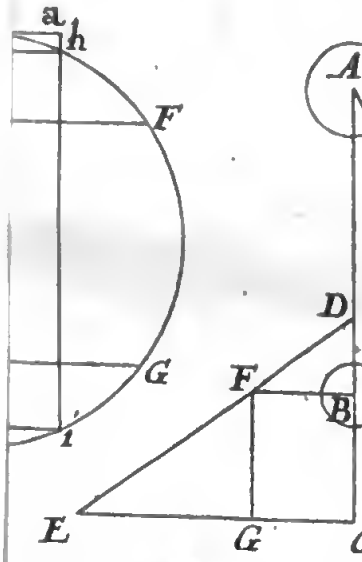


Fig. 101.

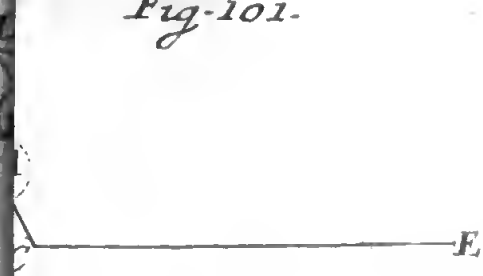


Fig. 106.

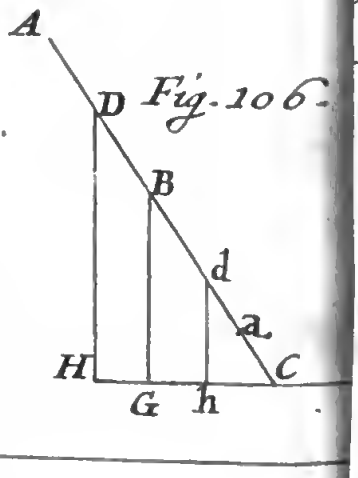


Fig. 108.

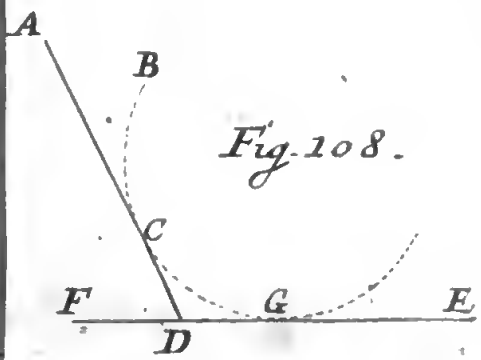


Fig. 110.

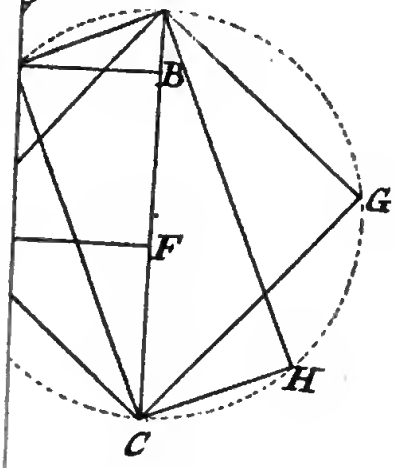


Fig. 112.

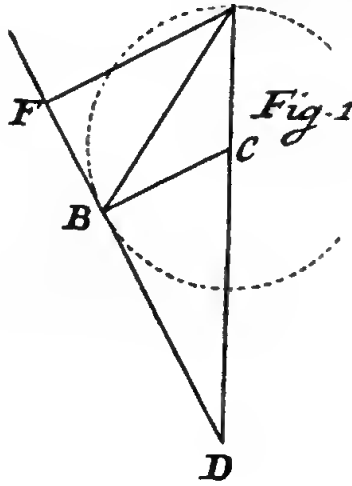
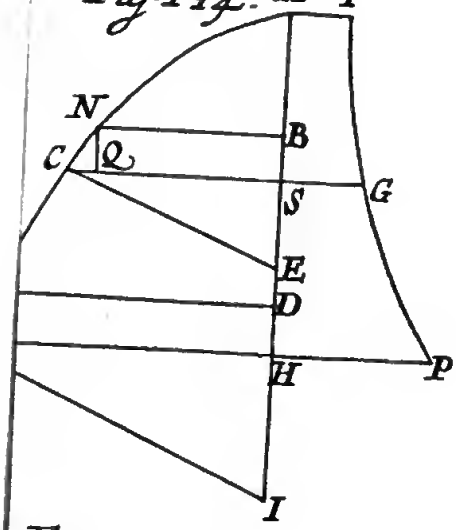


Fig. 114.



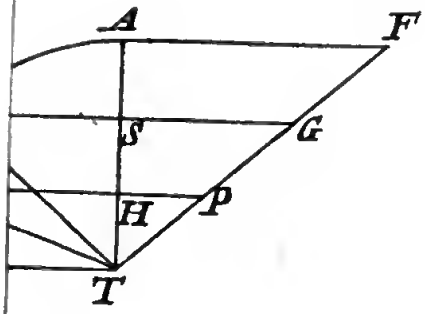


Fig. 117.

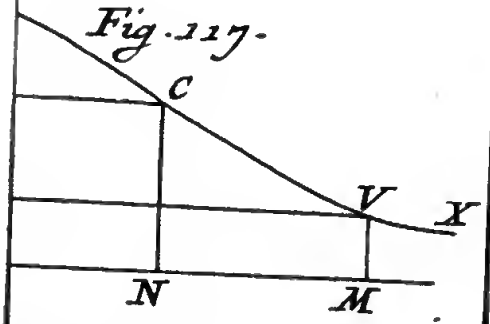


Fig. 121.

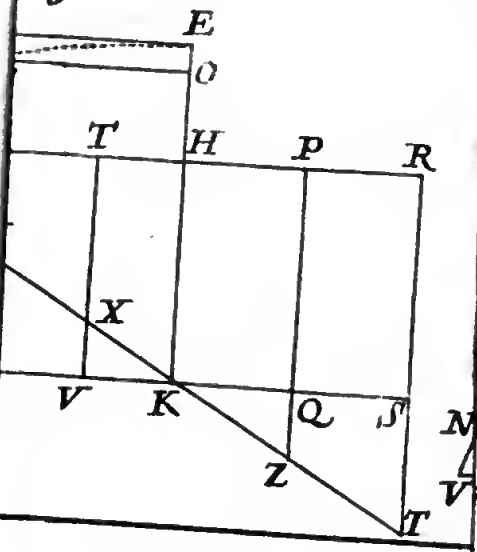
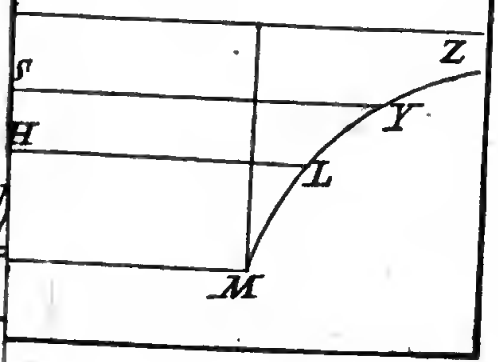


Fig. 119.



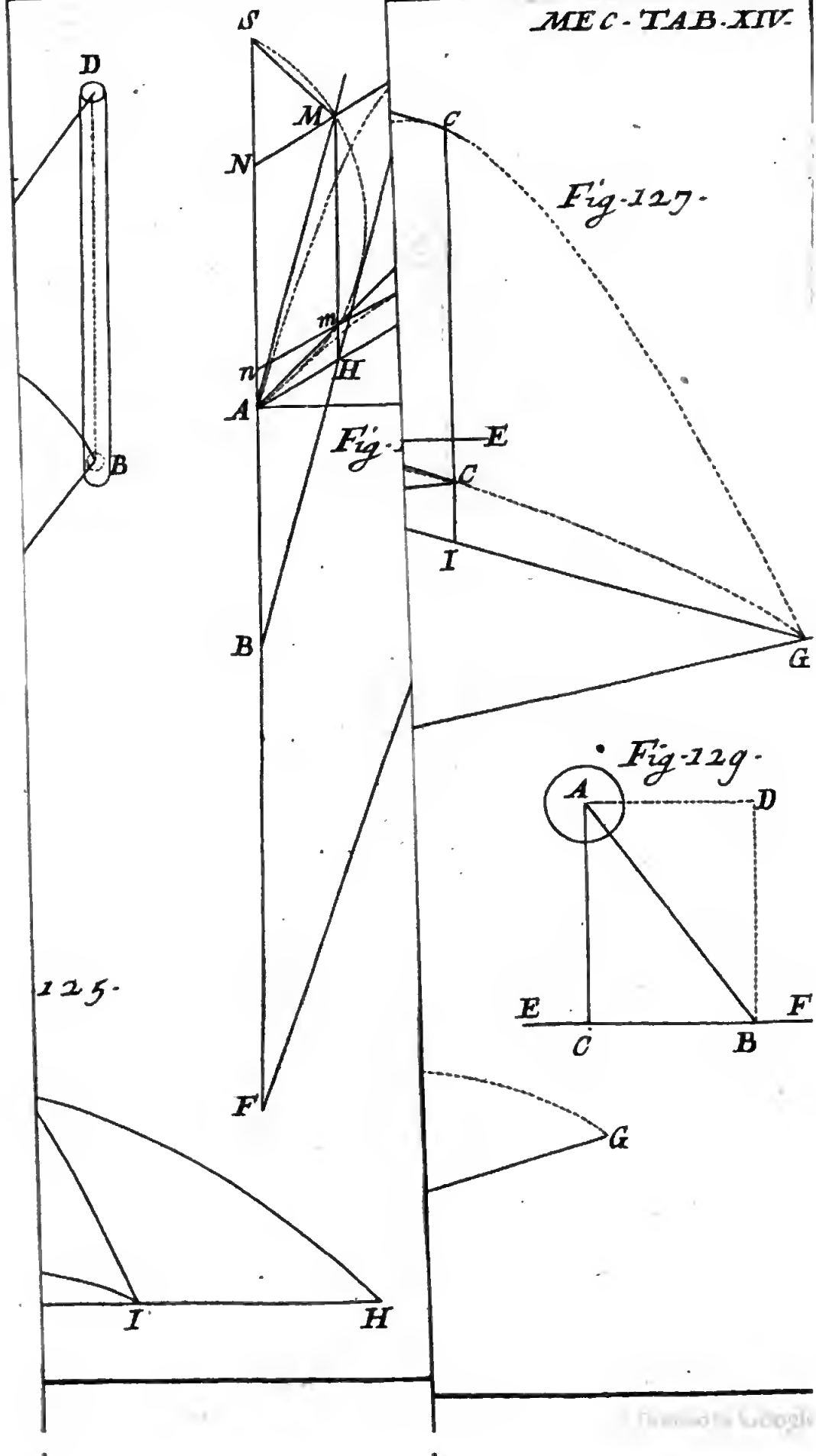

S
D
M
N
C
Fig-127-
m
n
H
A
B
Fig-
E
C
I
B
G
Fig-129-
A
D
E
F
C
B
125-
F
G
I
H

Fig. 131.

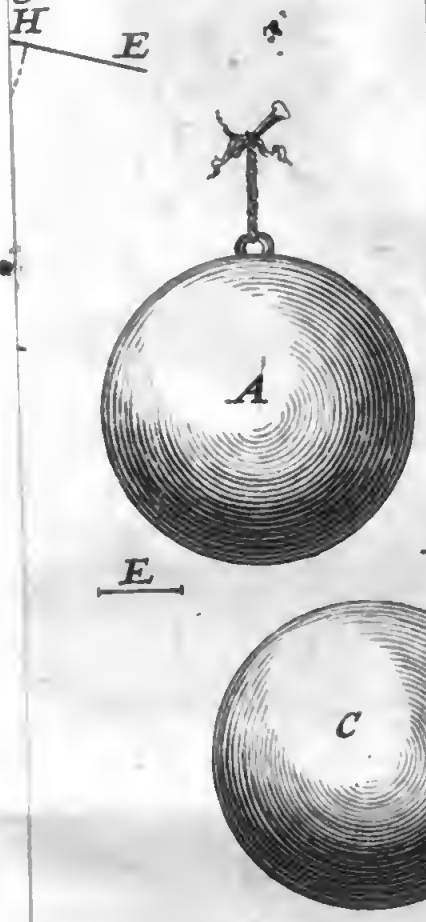


Fig. 136.

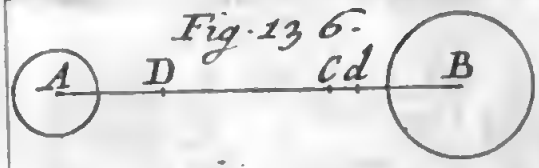


Fig. 137.

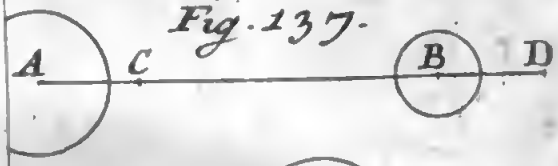
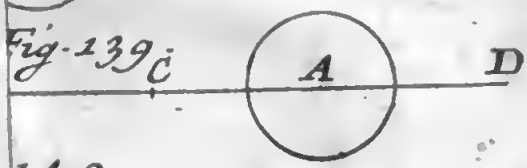


Fig. 139.



140.

Fig. 141.

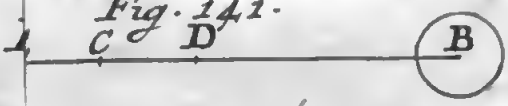


Fig. 142.

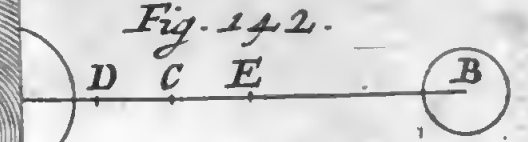


Fig. 144.

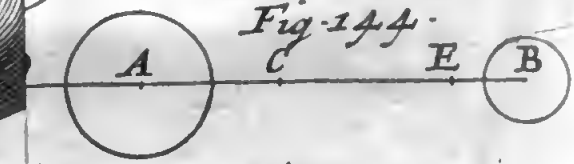


Fig. 146.

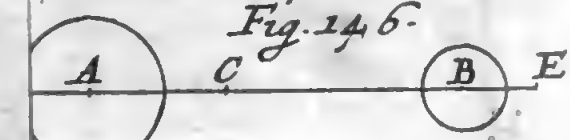


Fig. 148.

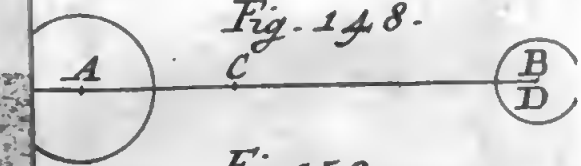


Fig. 150.

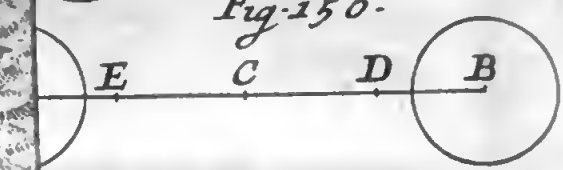
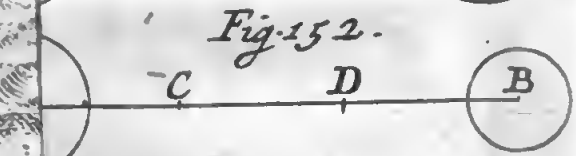


Fig. 152.



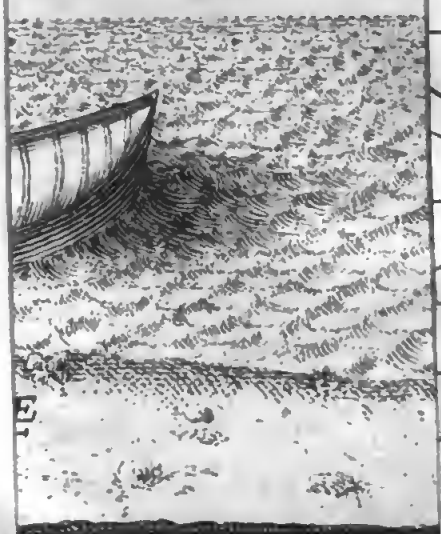


Fig-154 155.

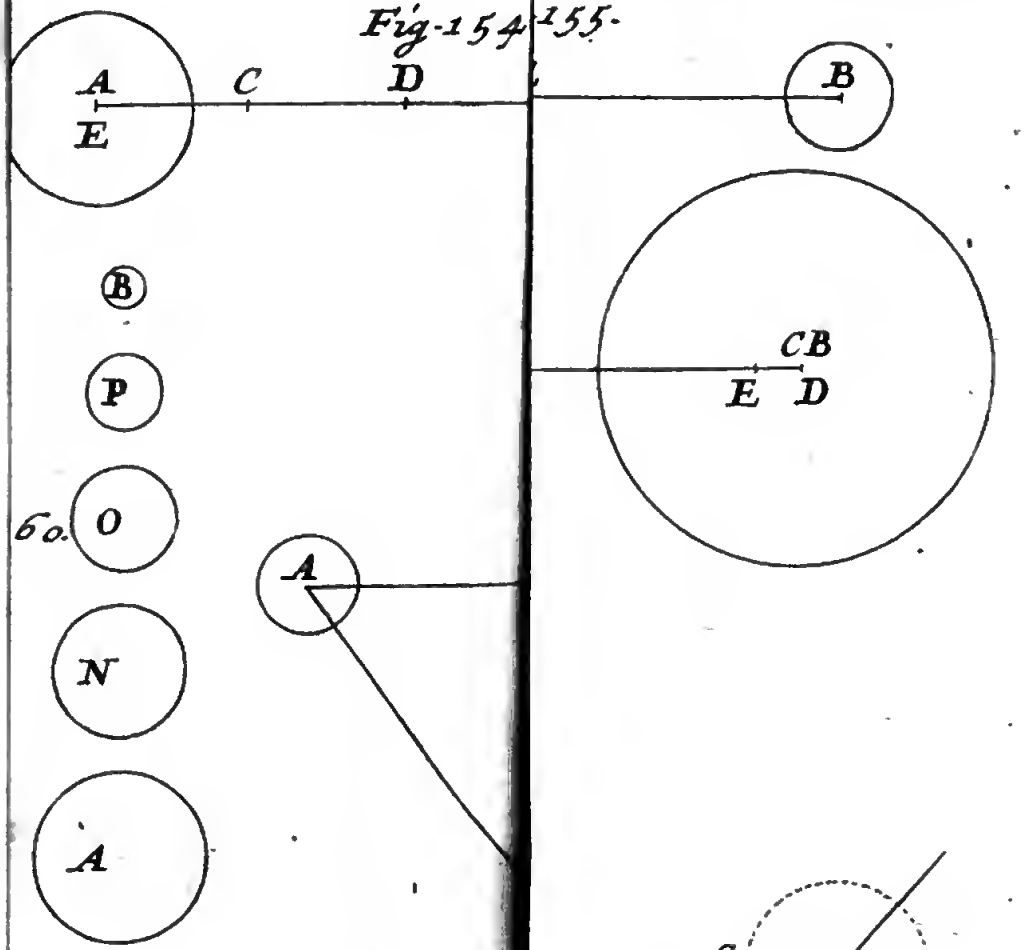
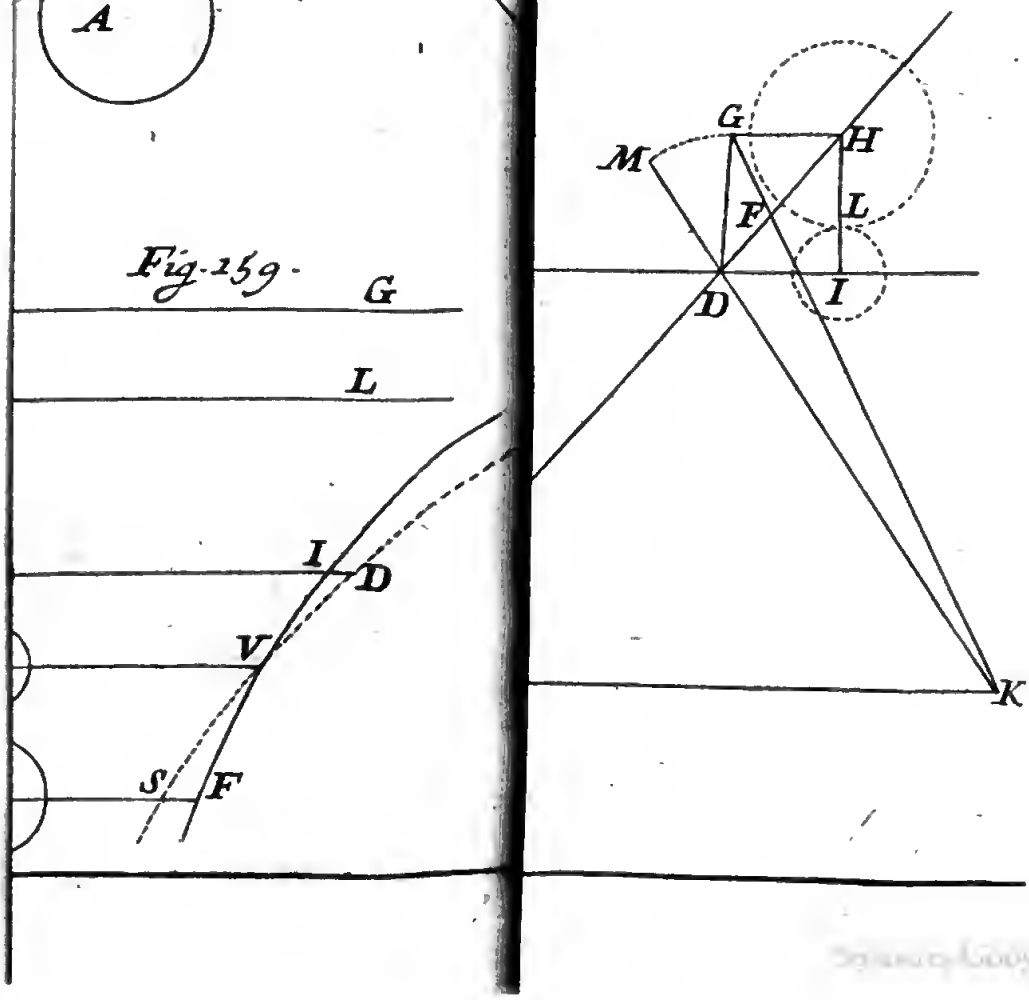
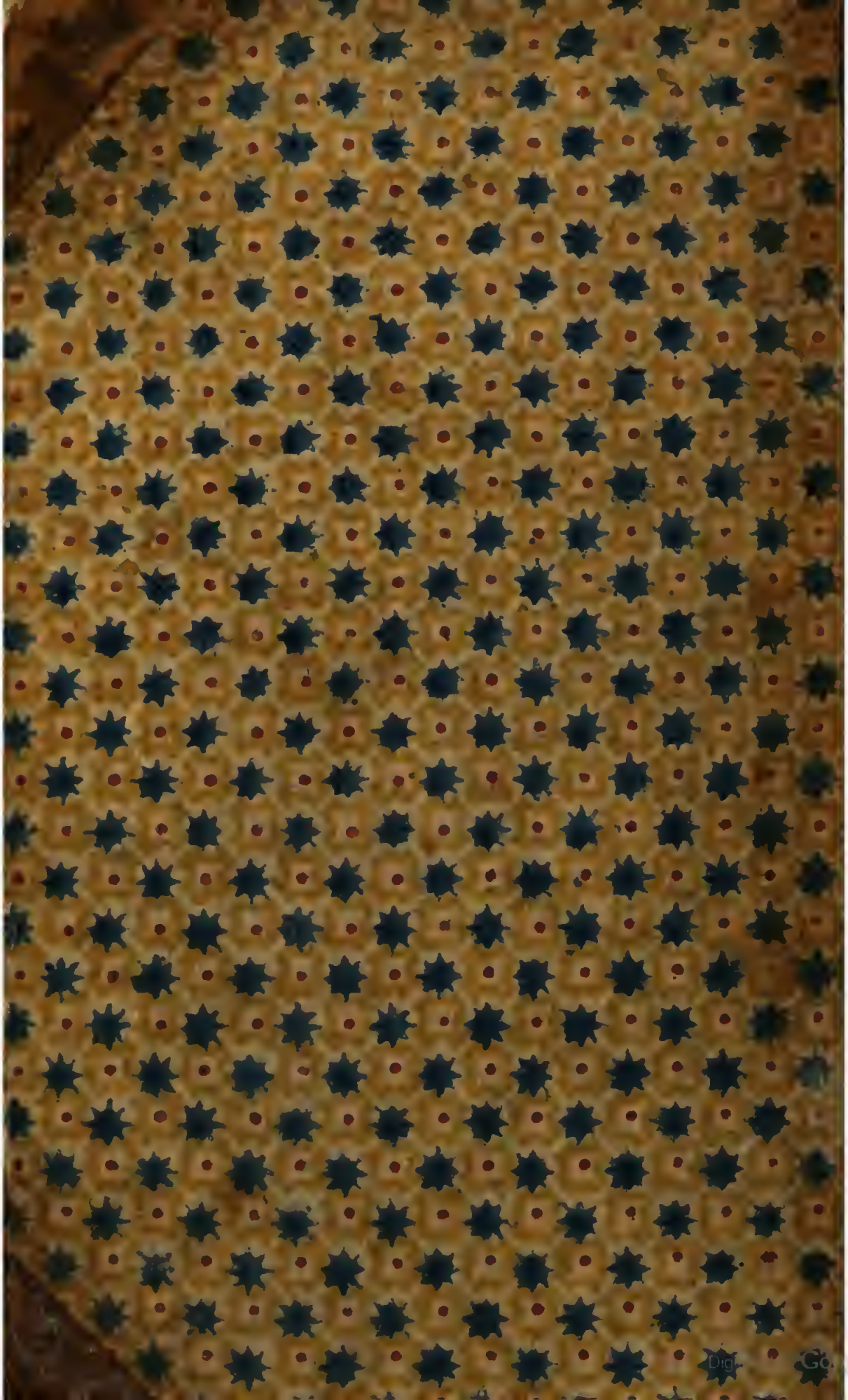


Fig-159.



00564169L